Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

О фредгольмовости G-операторов, ассоциированных с диффеоморфизмом Морса-Смейла.

Научный руководитель – Савин Антон Юрьевич

Изварина Наталья Романовна

Студент (магистр)

Российский университет дружбы народов, Факультет физико-математических и естественных наук, Москва, Россия

E-mail: izvarina-n@mail.ru

Объектом изучения являются операторы, ассоциированные с диффеоморфизмом типа Морса-Смейла $g : M \to M$, где M — двумерное замкнутое многообразие.

Рассматриваемые операторы представляются в виде конечной суммы:

$$D = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k(x)T^k : \quad H^s(M) \to H^s(M), \tag{1}$$

где $a_k(x) \in C^\infty(M), Tu(x) = u(g^{-1}x)$ — оператор сдвига, ассоциированный с диффеоморфизмом g, $H^s(M)$ —пространства Соболева. Операторы вида (1) известны как операторы взвешенного сдвига, и они часто появляются в теории динамических систем и теории вероятностей [1,2]. Фредгольмовость таких операторов зависит от показателя гладкости s пространства Соболева. Рассматриваемая нами задача состоит в том, чтобы выяснить, для каких показателей гладкости пространства Соболева оператор (1) фредгольмов.

В данной работе мы получили два результата.

Оператор D вида (1) с постоянными коэффициентами обратим тогда и только тогда, когда его символ $\sigma(D)(z) = \sum_k a_k z^k$ обратим в некотором кольце $r \leq |z| \leq R$, зависящем от s.

Если D является $\mathbb{Z}$-оператором, ассоциированным с диффеоморфизмом g, где g — диффеоморфизм типа Морса-Смейла, тогда существует интервал $I = (s_0, s_1)$, который удовлетворяет следующим условиям:

1. Оператор D не эллиптичен для всех $s \notin I$.
2. Если оператор D эллиптичен для одного $s \in I$, тогда он эллиптичен для всех $s \in I$.
3. Границы интервала (s_0, s_1) могут быть вычислены точно.

Благодарности. Автор благодарен G-RISC за поддержку. Результат был получен в Университете им. Лейбница в Ганновере. Работа поддержана грантом РФФИ №16-01-00373 (тема №022004-2-693).

Литература

[1] A.B. Antonevich, K. Zajkowski, "Variational principles for the spectral radius Sb. Math., 197:5 (2006), 633-680.

[2] Yu. D. Latushkin, A.M. Stepin, "Weighted shift operator, spectral theory of linear extensions and the Multiplicative Ergodic Theorem Math. USSR-Sb., 70:1 (1991), 143-163.

[3] V.Z. Grines, T.V. Medvedev, O.V. Pochinka. Dynamical systems on 2- and 3-Manifold. Developments in Mathematics. Vol. 46, Springer, 2016.

[4] A. Savin, B. Sternin. Elliptic theory for operators associated with diffeomorphisms of smooth manifolds, pseudo-differential operators, generalized functions and asymptotics. Operator Theory: Advances and Applications, 231, Springer, Basel, 2013, 1-26.