Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

О неединственности неограниченных решений задачи Коши для скалярных законов сохранения со степенной функцией потока

Научный руководитель – Горицкий Андрей Юрьевич

Гаргянц Лидия Владимировна

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальных уравнений, Москва, Россия

E-mail: lsteklova@gmail.com

В работе [1] построено обобщенное энтропийное решение задачи Коши

$$u_t + |u|^{\alpha-1} u_x = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+ = (0,\, \infty), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

$$u\Big|_{t=0} = \exp\left(-\frac{x}{\alpha-1}\right). \tag{2}$$

Это решение имеет счетное число ударных волн, являющихся графиками функций $\gamma_n(t) = 1 + \ln t - nT$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, где $T = T(\alpha) > 0$ — фиксированная константа. Отличительной особенностью этого решения является смена знака при переходе через каждую ударную волну. Следовательно, для него не справедлив принцип максимума (см. [2]), что, в свою очередь, ставит под сомнение единственность решения рассматриваемой задачи. Кроме того, в [3] доказано, что положительного решения задачи (1), (2) не существует.

Поскольку задача (1), (2) инвариантна относительно замены $x \to x + h$, $t \to t \cdot e^h$, $u \to u \cdot e^{-h/(\alpha-1)}$, построенное в [1] решение имеет вид $u(t,x) = t^{-1/(\alpha-1)} v(x - \ln t)$, где $v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — кусочно гладкая функция. В докладе будут описаны **все** обобщенные энтропийные решения уравнения (1), имеющие указанный вид.

Теорема 1. *Пусть функция $u(t,x) = t^{-1/(\alpha-1)} v(x - \ln t)$, где $v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $v \not\equiv 0$, — кусочно гладкая функция, является обобщенным энтропийным решением уравнения (1), определенным во всей полуплоскости $t > 0$. Тогда выполнено одно из двух утверждений.*

1. Функция v является $2T$–периодической; более того, T–антипериодической, т. е. $v(\xi + T) = -v(\xi)$ для любого $\xi \in \mathbb{R}$. На полупериоде функция v является решением некоторого обыкновенного дифференциального уравнения. Соответствующее ($2T$-периодическое по x) знакопеременное решение u удовлетворяет двусторонней оценке

$$t^{-1/(\alpha-1)} \leqslant |u(t,x)| \leqslant w \cdot t^{-1/(\alpha-1)}, \quad w = w(\alpha) > 1,$$

а, значит, $\lim\limits_{t \to +0} u(t,x) = \infty$.

2. Для некоторого $K \in \mathbb{R}$ функция u совпадает в области $\{(t,\, x) \mid x < \ln t + K\}$ с одной из функций, описанных в п. 1, а кривая $x = \ln t + K$ является еще одной линией разрыва решения. В области же $D = \{(t,\, x) \mid x > \ln t + K\}$ функция u является гладкой, при этом выполнено одно из двух утверждений:

i) функция u удовлетворяет в области D неравенству $|u(t,x)| \geqslant t^{-1/(\alpha-1)}$, и, следовательно, $\lim\limits_{t \to +0} u(t,x) = \pm\infty$;

ii) функция u удовлетворяет в области D неравенству $|u(t,x)| \leqslant t^{-1/(\alpha-1)}$ при этом существует $\lim\limits_{t \to +0} u(t,x) = A \exp\left(-\frac{x}{\alpha-1}\right)$ для некоторой константы A. В частности, при $A = 0$ будем иметь $u \equiv 0$ в области D.

Следствие 1. *Поскольку связь между константами K и A в теореме 1 не является однозначной, кусочно гладкое обобщенное энтропийное решение задачи (1), (2) не является единственным.*

Источники и литература

1) Гаргянц Л. В. О локально ограниченных решениях квазилинейных уравнений первого порядка со степенной функцией потока // Дифф. уравнения. 2016. Т. 52. №6. С. 854-855.

2) Кружков С. Н. Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными // Мат. сб. 1970. Т. 81. №2. С. 228–255.

3) Gargyants L. V. Example of nonexistence of a positive generalized entropy solution of a Cauchy problem with unbounded positive initial data // Russ. Jour. Math. Phys. 2017. V. 24. No 3. PP. 412–414.