Секция «Логика»

Об одной паранепротиворечивой модификации логики Гёделя-Даммита

Научный руководитель – Зайцев Дмитрий Владимирович

Петрухин Ярослав Игоревич

Студент (магистр)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Философский факультет, Кафедра логики, Москва, Россия

E-mail: yaroslav.petrukhin@mail.ru

В [3] К. Гёдель при доказательстве теоремы о бесконечнозначности интуиционистской логики **Int** использовал последовательность логик $\mathbf{G_3}, \mathbf{G_4}, \ldots$. В [2] М. Даммит построил логику $\mathbf{G}_\infty$, множество всех тавтологий которой является пересечением множеств всех тавтологий логик $\mathbf{G_3}, \mathbf{G_4}, \ldots$. За $\mathbf{G}_\infty$ закрепилось название «логика Гёделя-Даммита», хотя порой её называют логикой Гёделя или цепной (линейной) логикой Даммита **LC**. Как следует из [2], гильбертовское исчисление для $\mathbf{G}_\infty$ содержит все схемы аксиом гильбертовского исчисления для **Int**, правило modus ponens, а также схему аксиомы линейности — $(A \to B) \vee (B \to A)$[1]. Поскольку одной из схем аксиом **Int** (а значит и $\mathbf{G}_\infty$) является $A \to (\neg A \to B)$, $\mathbf{G}_\infty$ не относится к числу паранепротиворечивых логик[2].

Логической матрицей для $\mathbf{G}_\infty$ является $\mathfrak{M}_{\mathbf{G}_\infty} = \langle [0,1], \leqslant, \neg, \vee, \wedge, \to, \{1\} \rangle$, где $\leqslant$ есть отношение линейного порядка на $[0,1]$ и

$$\neg x = \begin{cases} 1, \text{ если } x = 0, \\ 0, \text{ если } x \neq 0; \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x \vee y = max(x,y); \\ x \wedge y = min(x,y); \end{array} \qquad x \to y = \begin{cases} 1, \text{ если } x \leqslant y, \\ y, \text{ если } x > y. \end{cases}$$

Насколько нам известно, первая попытка построить паранепротиворечивый аналог логики $\mathbf{G}_\infty$ была осуществлена А. Бруннером и В. Карнелли [1]. Их логика $\mathbf{G}^*_\infty$ была построена по алгебраическим соображениям и вместо импликации содержит её отрицание ($\leftarrow$). В результате в $\mathbf{G}^*_\infty$ вместо не корректного в ней modus ponens $(A, A \leftarrow B/B)$ имеет место так называемый *dual* modus ponens $(B, A \leftarrow B/A)$.

Мы рассмотрим другую паранепротиворечивую модификацию $\mathbf{G}_\infty$ — логику $\mathbf{G}^\star_\infty$, насколько нам известно, ранее не встречавшуюся в литературе. Языком $\mathbf{G}^\star_\infty$ является $\mathfrak{L}$. В $\mathbf{G}_\infty$ имеет место modus ponens, но не dual modus ponens. Логической матрицей для $\mathbf{G}^\star_\infty$ является $\mathfrak{M}_{\mathbf{G}^\star_\infty} = \langle [0,1], \leqslant, \neg, \vee, \wedge, \to, (0,1] \rangle$, где $\leqslant$ есть отношение линейного порядка на $[0,1]$ и

$$\neg x = \begin{cases} 1, \text{ если } x \neq 1, \\ 0, \text{ если } x = 1; \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x \vee y = max(x,y); \\ x \wedge y = min(x,y); \end{array} \qquad x \to y = \begin{cases} 1, \text{ если } x \leqslant y, \\ y, \text{ если } x > y. \end{cases}$$

Ясно, что $\mathbf{G}^\star_\infty$ отличается от $\mathbf{G}_\infty$ количеством выделенных значений и определением отрицания[3]. В результате $\not\models_{\mathbf{G}^\star_\infty} A \to (\neg A \to B)$, $\not\models_{\mathbf{G}^\star_\infty} (A \wedge \neg A) \to B)$ и $A, \neg A \not\models_{\mathbf{G}^\star_\infty} B$, что позволяет рассматривать $\mathbf{G}^\star_\infty$ как паранепротиворечивую логику. Гильбертовское исчисление для $\mathbf{G}^\star_\infty$ имеет два правила вывода — *modus ponens* и *правило замены эквивалентных*, а также следующие схемы аксиом:

---

[1] **Int** и $\mathbf{G}_\infty$ строятся в пропозициональном языке $\mathfrak{L}$, алфавиту которого принадлежат множество пропозициональных переменных $\{p_1, p_2, \ldots\}$, отрицание ($\neg$), импликация ($\to$), конъюнкция ($\wedge$), дизъюнкция ($\vee$), правая и левая круглые скобки. Понятие $\mathfrak{L}$-формулы определяется стандартно.

[2] Определение паранепротиворечивой логики см. в монографии Г. Приста [4].

[3] $\mathbf{G}^*_\infty$ отличается от $\mathbf{G}^\star_\infty$ определением связки $\leftarrow$, заменяющей импликацию $\to$: $x \leftarrow y = 0$, если $x \leqslant y$, $x \leftarrow y = x$ иначе.

$(Ax1)$ $A \to (B \to A)$
$(Ax2)$ $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
$(Ax3)$ $\neg(A \to (B \to B)) \to ((B \to B) \to \neg A)$
$(Ax4)$ $\neg((B \to B) \to A) \to ((B \to B) \to \neg A)$
$(Ax5)$ $\neg(B \to B) \to A$
$(Ax6)$ $\neg(A \to B) \to ((A \to B) \to B)$
$(Ax7)$ $\neg(A \to \neg(B \to B)) \to A$
$(\vee I_1)$ $A \to (A \vee B)$
$(\vee I_2)$ $B \to (A \vee B)$
$(\vee E)$ $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$
$(\wedge I)$ $A \to (B \to (A \wedge B))$
$(\wedge E_1)$ $(A \wedge B) \to A$
$(\wedge E_2)$ $(A \wedge B) \to B$
(EM) $A \vee \neg A$
(Lin) $(A \to B) \vee (B \to A)$

Автором доказана следующая

Теорема. Для всякой формулы A имеем $\vdash_{\mathbf{G}^{\star}_{\infty}} A$, е. и т. е. $\models_{\mathbf{G}^{\star}_{\infty}} A$.

Источники и литература

1) Brunner A.B.M., Carnielli W.A. Anti-Intuitionism and Paraconsistency // Journal of Applied Logic Vol.3. 2005. P. 161-184.
2) Dummett M. A propositional calculus with denumerable matrix // The Journal of Symbolic Logic Vol.24. 1959. P. 97-106.
3) Gödel K. On the intuitionistic propositional calculus // Gödel K. Collected works. N.Y. Vol.1. 1986. P. 300-301. (English translation of Gödel's paper of 1932).
4) Priest G. Paraconsistent logic // Handbook of philosophical logic Vol.6. 2002. P. 287-393.