Секция «Логика»

Метод фильтрации для доказательства свойства разрешимости временных логик

Научный руководитель – Григорьев Олег Михайлович

Пиманов Артем Сергеевич
Студент (бакалавр)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Философский факультет, Кафедра логики, Москва, Россия
E-mail: DillabunturMemoria@gmail.com

[12pt,a4paper]report [english,russian]babel amsmath amssymb

В данной работе будет показано каким образом с помощью метода фильтрации можно доказать свойство разрешимости для некоторых систем временной логики. Логика является разрешимой, если существует алгоритм, позволяющий определить, является ли формула данной логики законом или нет.

Предварительные понятия:

Определение замкнутого относительно подформул множества Σ:

(1) Для всякой формулы A, если $\neg A \in \Sigma$, то $A \in \Sigma$
(2) Для всякой формулы A и для всякой формулы B, если $A \vee B \in \Sigma$, то $A \in \Sigma$ и $B \in \Sigma$
(3) Для всякой формулы A и для всякой формулы B, если $A \wedge B \in \Sigma$, то $A \in \Sigma$ и $B \in \Sigma$
(4) Для всякой формулы A и для всякой формулы B, если $A \to B \in \Sigma$, то $A \in \Sigma$ и $B \in \Sigma$
(5)Для всякой формулы A, если $FA \in \Sigma$, то $A \in \Sigma$
(6)Для всякой формулы A, если $GA \in \Sigma$, то $A \in \Sigma$
(7)Для всякой формулы A, если $PA \in \Sigma$, то $A \in \Sigma$
(8)Для всякой формулы A, если $HA \in \Sigma$, то $A \in \Sigma$

Определение фильтрации:

Пусть $\mathfrak{M}$ – произвольная модель, $\mathfrak{M} =$, Σ – замкнутое множество,

$\leftrightsquigarrow_\Sigma$ отношение такое, что для всякой формулы φ из Σ верно, что $\mathfrak{M}$,$\omega \Vdash \varphi$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}, \upsilon \Vdash \varphi$,

$|\omega|_\Sigma$ – класс эквивалентности мира ω, W_Σ – $\{|\omega|_\Sigma \colon \omega \in W\}$

– модель $\mathfrak{M}_\Sigma$ такая, что:

(1) $W^f = W_\Sigma$
(2) Если $R(\omega, \upsilon)$, то $R^f(|\omega|_\Sigma, |\upsilon|_\Sigma)$
(3) Если $R^f(|\omega|_\Sigma, |\upsilon|_\Sigma)$, то для всех $F\varphi \in \Sigma$, если $\mathfrak{M}$,$\upsilon \Vdash \varphi$, то $\mathfrak{M}$,$\omega \Vdash F\varphi$
(4) Если $R^f(|\omega|_\Sigma, |\upsilon|_\Sigma)$, то для всех $G\varphi \in \Sigma$, если для всякого υ верно, что $\mathfrak{M}$,$\omega \Vdash G\varphi$, то $\mathfrak{M}$,$\upsilon \Vdash \varphi$
(5) Если $R^f(|\omega|_\Sigma, |\upsilon|_\Sigma)$, то для всех $P\varphi \in \Sigma$, если $\mathfrak{M}$,$\omega \Vdash \varphi$, то $\mathfrak{M}$,$\upsilon \Vdash P\varphi$
(6) Если $R^f(|\omega|_\Sigma, |\upsilon|_\Sigma)$, то для всех $H\varphi \in \Sigma$, если для всякого ω верно, что $\mathfrak{M}$,$\upsilon \Vdash H\varphi$, то $\mathfrak{M}$,$\omega \Vdash \varphi$
(7) $V^f(p) = \{|\omega|_\Sigma \colon \mathfrak{M}, \omega \Vdash p\}$ для всяких пропозициональных переменных р в Σ

Тогда $\mathfrak{M}^f_\Sigma$ – фильтрация модели $\mathfrak{M}$ через замкнутое множество Σ

Лемма о мощности $\mathfrak{M}^f_\Sigma$

Пусть Σ – замкнутое относительно подформул множество. Тогда для всякой модели $\mathfrak{M}$, если $\mathfrak{M}^f$ – фильтрация модели $\mathfrak{M}$ через замкнутое множество Σ, то $\mathfrak{M}^f \leq 2^{card(\Sigma)}$, где $card(\Sigma)$ – мощность Σ.

Теорема фильтрации

Пусть L – базовый модальный язык, $\mathfrak{M}^f =$ – фильтрация $\mathfrak{M}$ через Σ. Тогда для всех формул $\varphi \in \Sigma$ и всех миров ω в $\mathfrak{M}$ верно, что $\mathfrak{M},\omega \Vdash \varphi$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}^f, |\omega|_\Sigma \Vdash \varphi$

Теорема финитной апроксимируемости (finite model property)

Пусть L - прайеровский язык стандартной временной логики , φ есть L-формула. Если φ выполнима в бесконечной модели, то φ выполнима и в конечной модели. При этом мощность конечной модели должна составлять не менее 2^m, где m - число подформул φ.

Пусть φ выполнимо на $\mathfrak{M}$. Построим фильтрацию $\mathfrak{M}$ через замкнутое множество подформул Σ формулы φ. φ выполнима в конечной модели $\mathfrak{M}^f_\Sigma$, исходя из теоремы фильтрации. Грацица мощности фильтрации определена исходя из леммы о мощности $\mathfrak{M}^f_\Sigma$

Логика Λ является конечно-аксиоматизаруемой, если она обладает конечной аксиоматизацией Σ

Логика Λ является рекурсивно-аксиоматизируемой, если она обладает рекурсивной аксиоматизацией Σ

Логика Λ является аксиоматизаруемой, если она обладает рекурсивно-перечислимой аксиоматизацией Σ

Лемма I

Если Λ аксиоматизируема, то Λ является рекурсивно-перечислимой. (Следствие из Леммы Крейга: всякая аксиоматизируемая логика является рекурсивно-аксиоматизируемой)

Лемма II

Если M есть рекурсивно-перечислимое множество конечных моделей, то множество невыполнимых в M формул рекурсивно-перечислимо.

Лемма III

Если Λ - аксиоматизируемая логика, обладающая финитной апроксимируемостью относительно рекурсивно-перечислимого множества моделей, то Λ - разрешима.

Теорема

Если Λ есть конечно-аксиоматизируемая временная логика, обладающая конечной апроксимируемостью, то Λ – разрешима.