# Описание нулевой динамики линейных систем управления

***Роговский Александр Игоревич***

*Аспирант*

*Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия*

*E-mail:* alexander.rogovskiy@gmail.com

Рассматривается линейная стационарная динамическая система

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),\ y(t) = Cx(t), \tag{1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $u(t), y(t) \in \mathbb{R}^l$ — вход и выход соответственно, $A, B, C$ — постоянные матрицы соответствующих размеров. Такую систему будем обозначать $\{A, B, C\}$.

Множество $\mathcal{N}$ всех решений $x(t)$ уравнений (1), для которых $Cx(t) \equiv 0$, будем называть нулевой динамикой (см. [1, с. 61]). В данной работе рассматривается задача описания нулевой динамики, т. е. отыскания уравнений, которым удовлетворяют все решения, принадлежащие $\mathcal{N}$, и только они. Данная задача решена для систем, имеющих относительный порядок (см. [2, с. 220], [1, с. 92]).

**Определение 1.** *Вектор $r = (r_1, \ldots, r_l)^T \in \mathbb{N}^l$ называется вектором относительного порядка (ОП) системы* (1), *если выполнены следующие условия:*

1. $C_iB = 0,\ C_iAB = 0, \ldots, C_iA^{r_i-2}B = 0,\ C_iA^{r_i-1}B \neq 0,\ i = \overline{1, l}.$
2. *Строки $C_1A^{r_1-1}B, \ldots, C_lA^{r_l-1}B$ линейно независимы.*

*Здесь $C_i$ — строки матрицы $C$, $i = \overline{1, l}$.*

Однако, для некоторых систем условия ОП не выполняются (см., например, [1, с. 72]). Для таких систем поставленная задача является актуальной.

Для начала предположим, что матрицы системы (1) удовлетворяют условию

$$CA^{j-1}B = 0 \ \ \forall j \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

В этом случае справедливо следующее утверждение (см. [3]):

**Лемма 1.** *Если выполнено условие* (2), *то существует невырожденная матрица $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ такая, что уравнения системы $\{M^{-1}AM,\ M^{-1}B,\ CM\}$ имеют вид*

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1,\ \dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2u,\ y = C_1x_1, \tag{3}$$

*причем из тождества* $y(t) \equiv 0$ *следует, что* $x_1(t) \equiv 0$. *Здесь* $x_1(t) \in \mathbb{R}^p$, $0 < p < n$, $x_2(t) \in \mathbb{R}^{n-p}$, *а матрицы* $A_{11}, A_{21}, A_{22}, B_2, C_2$ *имеют соответствующие размеры.*

Легко заметить, что уравнения нулевой динамики системы (3) имеют вид

$$x_1(t) \equiv 0,\ \dot{x}_2(t) = A_{22}x_2(t) + B_2u(t).$$

Таким образом, поставленная задача решена для системы (1), удовлетворяющей условиям (2).

В общем случае имеет место следующее утверждение (см. [3]):

**Теорема 1.** *Пусть для системы* (1) *не выполнены ни условия ОП, ни условия* (2). *Тогда существует невырожденные матрицы* $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $S, T \in \mathbb{R}^{l\times l}$ *такие, что уравнения системы* $\{M^{-1}AM,\ M^{-1}BS,\ TCM\}$ *имеют вид*

$$\begin{gathered}\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u_1,\ \dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2u_2,\\ y_1 = C_{11}x_1,\ y_2 = C_{21}x_1 + C_{22}x_2,\end{gathered} \tag{4}$$

*причем из тождества* $y_1(t) \equiv 0$ *следует, что* $x_1(t) \equiv 0$, *а для системы* $\{A_{22}, B_2, C_{22}\}$ *выполнены либо условия* (2), *либо условия ОП. Здесь* $x_1(t) \in \mathbb{R}^p$, $0 < p < n$, $x_2(t) \in \mathbb{R}^{n-p}$, $u_1, y_1 \in \mathbb{R}^q$, $0 < q < l$, $u_2, y_2 \in \mathbb{R}^{l-q}$, *а матрицы* $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_1, B_2, C_{11}, C_{21}, C_{22}$ *имеют соответствующие размеры.*

Нулевая динамика системы (4) «совпадает» с нулевой динамикой системы $\{A_{22}, B_2, C_{22}\}$. Поскольку для последней имеют место либо условия ОП, либо условия (2), поставленная задача решена.

## Литература


1. Ильин А. В., Фомичев В. В., Коровин С. К. Методы робастного обращения динамических систем. М.: Физматлит, 2011.
2. Isidori A. Nonlinear Control Systems. London: Springer-Verlag, 1995
3. Фомичев В. В., Краев А. В., Роговский А. И. О свойствах нулевой динмаики линейных систем // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52, № 11. С. 1533–1544.