Формирование оптимальных товарных запасов с целью максимизации общественного благосостояния

Парилова Наталия Андреевна

Студент

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: nataliiaparilova@gmail.com

В развивающихся странах покупка продовольственных товаров составляет основную часть расходов семьи. Скачки цен оказывают негативное влияние на семейный бюджет. Страны используют различные методы борьбы с ростом цен, один из них – формирование товарных запасов (например, хранилище зерна) [1]. Особенности производства и транспортировки товаров определяют характер пополнения запасов, а особенности потребления – характер процесса расходования. Возникает необходимость определить оптимальную величину запаса.Задача управления товарными запасами часто встречается в наши дни.

Пусть $P(t)$– функция цены товара, зависящая от времени, $Y(t)$ – доход потребителя. Рассмотрим функцию спроса $D(P,Y) = dP^{\alpha}Y^{\eta}$, где α – эластичность спроса по цене $\alpha \in (0,1)$, а η – эластичность спроса по доходу $\eta \in (0,1)$, d – параметр нормализации. Для получения косвенной функции полезности воспользуемся тождеством Роя. Получаем:

$$V(P,Y) = e^{d(\eta-1)P^{1+\alpha}}e^{(\alpha+1)Y^{1-\eta}}$$

Пусть H_r – количество произведенной продукции, S – количество хранимого товара, δ – коэффициент естественной убыли. Динамика хранилища описывается следующим уравнением:

$$\dot{S} = H_r - D - \delta S$$

Производитель планирует произвести H товара, однако из-за воздействия различных случайных факторов товара производится меньше. В данной работе мы считаем, что $H_r = \xi H$, где ξ – случайная величина.

Покупатель хочет максимизировать свою косвенную функцию полезности. Производитель стремится максимизировать свою прибыль, которая складывается из доходов от продаж и расходов на планирование производства товара $\psi(H) = h\frac{H^{1+\mu}}{1+\mu}$. Хранилище либо продает товар производителю, либо закупает товар в хранилище, также у него есть расходы на хранение. Каждый стремится максимизировать свою прибыль. Отсюда получается, что функция общественного благосостояния выглядит следующим образом:

$$W = V(P, Y) + [P\xi H - \Psi(H)] + P(D - \xi H) - kS$$

Функционал в нашей задаче это дисконтированная сумма значений функции общественного благосостояния по времени:

$$J = \int_0^\infty e^{-\rho t} W dt$$

Таким образом, имеем следующую задачу оптимального управления:

$$\begin{cases} \dot{S} = \xi H - D - \delta S \\ S \geq 0 \\ S(0) = 0 \\ J = \int_0^\infty e^{-\rho t}(V(P, Y) - \Psi(H) + PD - kS)dt \to \max\limits_{P(t), H(t)} \end{cases}$$

Для данной задачи, опираясь на результаты работы [3], было доказано существование решения, получено численное решение. В некоторых случаях получено также аналитическое решение. Дана интерпретация результатов с экономической точки зрения.

Литература

1. Gouel C., Jean S., Optimal Food Price Stabilization in a Small Open Developing Country // World Bank Economic Review, Volume 29, Issue 1, P. 72–101.
2. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. М.: МЦНМО, 2011.
3. Асеев С. М., Бесов К. О., Кряжимский А. В. Задачи оптимального управления на бесконечном интервале времени в экономике // УМН, 2012,том 67,выпуск 2, С. 195–253.