Асимптотика собственных значений сингулярно возмущённой на малом участке задачи Стеклова

Абдуллазаде Наджафгулу Натиг оглы

Магистрант

Бакинский филиал МГУ имени М. В. Ломоносова, Баку, Азербайджан

E-mail: n-abdu@mail.ru

Обозначим через Ω область в $\mathbb{R}^2$, лежащую в верхней полуплоскости, граница которой Γ является гладкой и состоит из двух частей: $\Gamma = \Gamma_\varepsilon \cup \gamma_\varepsilon$, где Γ_ε — отрезок $\left[-\frac{\varepsilon}{2}; \frac{\varepsilon}{2}\right]$ на оси абсцисс. Здесь и далее ε — малый параметр.

Нашей целью является построение асимптотики при $\varepsilon \to 0$ собственных элементов следующей спектральной задачи:

$$\begin{cases} \Delta u_\varepsilon = 0 \quad \text{при } x \in \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 \quad \text{при } x \in \gamma_\varepsilon, \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = \lambda_\varepsilon u_\varepsilon \quad \text{при } x \in \Gamma_\varepsilon. \end{cases} \tag{1}$$

Рассмотрим также задачу

$$\begin{cases} \Delta u_0 = 0 \quad \text{при } x \in \Omega, \\ \frac{\partial u_0}{\partial \nu} = \lambda u_0 \quad \text{при } x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

Имеет место теорема.

Теорема 1. *Пусть λ_0 — простое собственное значение спектральной задачи* (2)*. Тогда*

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) - \frac{1}{\ln \varepsilon} u_{0,1}(x) + O\left(\left|\frac{1}{\ln \varepsilon}\right|^2\right),$$

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_0 - \frac{\pi u_0^2(0)}{\ln \varepsilon} + O\left(\left|\frac{1}{\ln \varepsilon}\right|^2\right)$$

где $u_{0,1}$ удовлетворяет задаче

$$\begin{cases} -\Delta u_{0,1} = 0 \quad \textit{в } \Omega, \\ \frac{\partial u_{0,1}}{\partial \nu} = \lambda_0 u_{0,1} + \pi u_0^2(0) u_0 \quad \textit{на } \partial\Omega \setminus \{(0,0)\}, \\ u_{0,1}(x_1, x_2) \sim u_0(0)\, ln|x| \quad \textit{при} \ \ |x| \to 0. \end{cases} \tag{3}$$