Об аддитивном вложении абелевой полугруппы в выпуклый конус

Друшляк Анастасия Игоревна

Студент

Факультет математики и информатики КФУ имени В. И. Вернадского, Симферополь, Россия

E-mail: hactinet@mail.ru

Введение. Как известно, при переходе от задач линейного и гладкого анализа к задачам выпуклого и негладкого анализа, как правило, происходит переход от линейной категории пространств к категории выпуклых конусов. Однако в современном негладком анализе часто возникают задачи, требующие ослабления некоторых свойств выпуклых конусов. Так, например, активно исследуется возможность отказа от второго дистрибутивного закона $((\alpha+\beta)x = \alpha x+\beta x)$; часто рассматривается выпуклые конусы без условия вложения в линейное пространство $((x+y = x+z) \Rightarrow (y = z))$. и т.д. Недавно, в работах моего научного руководителя [2,4] был рассмотрен вопрос о вложении точно делимой полугруппы в выпуклый конус, позволяющем уйти от второго дистрибутивного закона.

В связи с этим возникла более общая проблема: построить цепочку канонических вложений, ведущих от произвольной абелевой полугруппы к выпуклому конусу. В настоящем докладе приводится решение этой проблемы.

Основные и промежуточные объекты: терминология, обозначения, вспомогательные результаты

Абелева полугруппа: $X = \{x\}$. Для удобства мы рассматриваем абелевы полугруппы с нулем (моноиды). Терминология аддитивная. Обозначение категории: (S).Обозначение категории: (S).

Делимая абелева полугруппа: абелева полугруппа, удовлетворяющая условию $\forall x \in X \forall n \in \mathbb{N} \exists y \in X : \overbrace{y+\cdots+y}^{n} := \sum_n y = x$. Обозначение категории: (DS).

Точно (однозначно) делимая абелева полугруппа: делимая абелева полугруппа,удовлетворяющая условию: $\forall x_1, x_2 \in X$, $\forall n \in \mathbb{N} \left(\sum_n x_1 = \sum_n x_2\right) \Rightarrow (x_1 = x_2)$.Обозначение категории: (UDS).

Следствие: $\left(\left(\sum_m x = \sum_n x, x \neq 0\right) \Rightarrow (m = n)\right)$.

Выпуклый конус: абелева полугруппа по сложению векторов, образующая модуль над $\mathbb{R}_+$ по умножению скаляров из $\mathbb{R}_+$ на векторы. Обозначение категории: (Con).

Теорема 1. *Любая абелева полугруппа может быть изоморфно вложена в делимую абелеву полугруппу.*

Делимость: $D : (S) \to (DS)$. Введем фактор-отношение в $X \times \mathbb{N} : ((x_1, n_1)D(x_2, n_2)) \Leftrightarrow \left(\sum_{n_2} x_1 = \sum_{n_1} x_2\right)$. Пусть $X_D = X \times \mathbb{N}_{/D}$ – фактор-полугруппа с соответствующими фактор-операциями, тогда каноническое вложение $D : X \to X_D$ определяется равенством:
$Dx = (x, 1)\hat{} = \{(y, n) | x = \sum_n y\}$.

Точная делимость: $U : (DS) \to (US)$. Введем фактор-отношение в $X = \{x\}$: $(x_1 U x_2) \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N} : \sum_n x_1 = \sum_n x_2)$. Пусть $X_U = X_{/U}$ – делимая фактор-полугруппа с соответствующими фактор-операциями; тогда каноническое вложение $U : X \to X_U$ определяется равенством:
$Ux = \widehat{x} = \{y \in X | \exists n \in \mathbb{N} : \sum_n x = \sum_n y\}$.

Модуляция: $M : (US) \to (Con)$. Введем в точно делимой полугруппе X "аддитивное умножение"неотрицательных скаляров на векторы, вначале для рациональных скаляров.

(1) Если $x \in X,\ r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}_+$, то положим $(y = r * x) \Leftrightarrow (\sum_m x = \sum_n y)$.

(2) Если $\gamma \in \mathbb{R}_+$ определяется сечением Дедекинда $A\big|B$ в $\mathbb{Q}_+$, то положим $\gamma * x = (A * x\big|B * x)$.

(3) Определим X_M как аддитивную оболочку множества $\mathbb{R}_+ * X$ относительно сложения по Минковскому:
$X_M = \left\{\sum_{k=1}^n \gamma_k * x_k \middle| \gamma_k \in \mathbb{R}_+,\ x_k \in X,\ n \in \mathbb{N}\right\}$; при этом модуляция продолжается на X_M очевидным образом:
$\alpha * (\sum_{k=1}^n \gamma_k * x_k) = \sum_{k=1}^n (\alpha\gamma_k) * x_k$.

Каноническое вложение X в X_M определяется равенством:
$Mx = 1 * x = \left([0, 1]_{\mathbb{Q}} * x \middle| (1, +\infty)_{\mathbb{Q}} * x\right)$.

Основная цепочка вложений: $\boxed{S} \xrightarrow{D} \boxed{DS} \xrightarrow{U} \boxed{US} \xrightarrow{M} \boxed{Con}$.

Свойства основных вложений:

(1) Вложение D-аддитивный изоморфизм ("в"); при этом:
$D : (S) \to (DS)$.

(2) Вложение U-аддитивный гомоморфизм ("на"); при этом:
$U : (DS) \to (US)$.

(3) Вложение M-аддитивный изоморфизм ("в"); при этом:
$M : (US) \to (Con)$.

Литература

1. Друшляк А. И. Классические и неклассические конусы в негладком анализе//Сборник тезисов участников форума «На-

ука будущего — наука молодых» — Казань, 2016. Т. 1, С. 318–320.

2. Орлов И. В. О вложении безгранично делимой полугруппы в выпуклый конус // Математические заметки. В печати.
3. Feigelstock S. Divisible is injective// Soochow J. Math., 32:2, 2006,P. 241–243.
4. Orlov I. V. Generalized Hamel basis and basis extension in convex cones and completely divisible semigroups// Euras. Math. J., to appear.