Задача расширения производственных мощностей с учетом хранения запасов

Ибраева Айдана Бериковна

Студентка

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: `i_aidana_b@mail.ru`

Цель — определить расписание и объем внедрения мощности какого-либо ресурса, чтобы удовлетворить спрос на производимые продукты, при этом минимизируя полную стоимость затрат за весь период планирования производства. Не ограничивая общности, мы предполагаем нулевую начальную мощность. Пусть x_t — объем добавленной мощности производства ресурса в период времени t и переменная $y_t = 1$, если происходит расширение мощности в момент t, иначе $y_t = 0$. Тогда поставленная *задача расширения производственных мощностей (CEP — capacity expansion problem)* может быть сформулирована следующим образом:

$$(CEP) : \sum_{t=1}^{T} (\alpha_t x_t + \beta_t y_t) \to \min_{x,y},$$

$$\begin{cases} 0 \leqslant x_t \leqslant M_t y_t, & t = 1, \ldots, T \\ \displaystyle\sum_{\tau=1}^{t} x_\tau \geqslant d_t, & t = 1, \ldots, T \\ y_t \in \{0, 1\}, & t = 1, \ldots, T \end{cases}$$

В данной задаче предполагаются заданными и постоянными параметры (α_t, β_t, d_t), соответственно, коэффициенты переменных, постоянных затрат и спрос. M_t— верхняя граница на прирост мощности. Первое неравенство обеспечивает ограничение уровня приобретения мощности верхней границей, второе гарантирует, что установленная полная мощность достаточна для удовлетворения спроса в момент времени t.

Рассмотрим формулировку задачи, в которой *учитывается объем запасов (LSP — lot-sizing problem)* [1].

$$(LSP) : \sum_{t=1}^{T} (\alpha_t X_t + \beta_t Y_t + h_t I_t) \to \min_{X,Y,I},$$

$$\begin{cases} I_{t-1} + X_t = \bar{d}_t + I_t, & t = 1, \ldots, T \\ I_0 = 0, & \\ X_t \leqslant M_t Y_t, & t = 1, \ldots, T \\ X_t \geqslant 0, I_t \geqslant 0, & t = 1, \ldots, T \\ Y_t \in \{0, 1\}, & t = 1, \ldots, T \end{cases}$$

Теорема 1. [1] *Существует взаимно-однозначное соответствие между множеством допустимых решений* (x_n, y_n) *для* (CEP) *с параметрами* (α_t, β_t, d_t) *и множеством допустимых решений* (X_n, Y_n, I_n) *для* (LSP) *с параметрами* $(\alpha_t, \beta_t, h_t, \bar{d}_t)$*, где* $\bar{d}_n = (d_n - \max_{1 \leqslant m < n}\{d_m\})^+$.

С помощью преобразований и соответствующих утверждений последней системы получим эквивалентную ей систему, $LP{-}relaxation$ которой будет выглядеть следующим образом:

$$(RLSP): \sum_{j=1}^{T} \sum_{k=j}^{T} (\sum_{t=j}^{k} (\alpha_j + h_j + h_{j+1}+, \ldots, +h_{t-1})\bar{d}_t) z_{jk} + \sum_{j=1}^{T} \beta_j Y_j \rightarrow \min_{z,Y},$$

$$\begin{cases} Y_1 = 1, \\ -\sum_{j=1}^{k-1} z_{jk-1} + Y_k = 0, k = 2, \ldots, T \\ \sum_{j=k}^{T} z_{kj} - Y_k = 0, k = 1, \ldots, T \\ Y_j \in [0, 1], j = 1, \ldots, T \end{cases}$$

Теорема 2. $(RLSP)$ *и* $(LSP4)$ *имеют оптимальные значения с* $Y_k \in \{0, 1\}$ *для любых параметров* $(\alpha, \beta, h, \bar{d})$.

Литература

1. Gyana Parija, Shabbir Ahmed, and Alan J. KingA Multi-Stage Stochastic Integer Programming Approach for Capacity Expansion under Uncertainty20031–9
2. G. L. Nemhauser and L. A. WolseyInteger and Combinatorial OptimizationJohn Wiley and Sons, In199976-81, 417-427, 508-513