Обобщенные случайные графы

Даньшина Мария Александровна

Студент

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: danschina.maria@yandex.ru

В рамках классической модели Эрдеша-Реньи рассматривается случайный граф с n вершинами, в котором ребра - это бернуллиевские случайные величины $(X_{ij})_{i<j}$, при этом $\mathsf{P}(X_{ij} = 1) = p$. Событие $X_{ij} = 1$ означает, что существует ребро между i и j вершинами. $X_{ij} = X_{ji}$, для $i < j$ и $X_{ii} = 0$ для любого i.

Т. Бриттон в работе [1] рассмотрел модель обобщенного случайного графа, в которой вероятность наличия ребра между i и j вершинами основывается на случайных весах вершин W_i, W_j:

$$\mathsf{P}(X_{ij} = 1) = p_{ij} = \frac{W_i W_j}{n + W_i W_j}.$$

Бриттон показал, что в этом случае предельное распределение степени вершины $D_i = \sum_{j=1}^{n} X_{ij}$ является смешанным пуассоновским со случайным параметром λ, т.е.

$$\mathsf{P}(D_i = k) = E\left[e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\right], \;\; \forall k \in N$$

где λ - случайная величина.

Доклад посвящен обобщению работы [1] на случай:

$$\mathsf{P}(X_{ij} = 1) = \frac{W_i W_j}{L_n + W_i W_j}, \quad L_n = \sum_{i=1}^{n} W_i.$$

В частности, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть в обобщенном случайном графе с n вершинами и вероятностью наличия ребра между вершинами*

$$p_{ij} = \frac{W_i W_j}{L_n + W_i W_j},$$

где $W_1, ..., W_n$ - независимые одинаково распределенные случайные величины с конечными моментами порядка $1+\epsilon$ для некоторого $\epsilon > 0$. Тогда *a) предельное распределение D_k при $n \longrightarrow \infty$ является смешанным пуассоновским со случайным параметром W_k;*

b) для любого m $D_1, D_2, ..., D_m$ - асимптотически независимы.

Литература

1. Britton T., Deijfen M., and Martin-Lof A. 2006. Generating simple random graphs with prescribed degree distribution. J. Stat. Phys., 124(6), 1377-1397.
2. Erdos P., and Renyi A. 1959. On random graphs. I. Publ. Math. Debrecen, 6, 290-297.