Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

О верхней границе подряд идущих значений перманента (0,1) матриц

Научный руководитель – Гутерман Александр Эмилевич

Таранин Константин Александрович
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра высшей алгебры, Москва, Россия
E-mail: coloconstar@mail.ru

Пусть $\mathbb{R}$ — поле действительных чисел, M_n — кольцо $n \times n$ матриц над этим полем, S_n — группа перестановок на множестве из n элементов. Подмножество множества M_n, содержащее все (0,1) матрицы, то есть матрицы, состоящие только из нулей и единиц, мы, вслед за [1], будем обозначать $\mathfrak{A}_n$.

Определение 1. Перманентом матрицы $A \in M_n$ называется число

$$per(A) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}.$$

Нетрудно проверить, что при заданном n функция перманента на множестве $\mathfrak{A}_n$ принимает целочисленные значения от 0 до $n!$, но при этом не все целые числа из этого отрезка являются значениями перманента. Например, наибольшее значение $n!$ достигается на матрице J_n, состоящей только из единиц, а при замене некоторой единицы нулём получается уже $n! - (n-1)!$, и при добавлении нулей в матрицу взамен других единиц перманент не увеличивается. Однако в работе [1] была доказана следующая теорема о значениях, принимаемых подряд, начиная с 0.

Теорема 1. ***(Brualdi, Newman, 1965, [1]).*** *Для любого $n \in \mathbb{N}$ и любого неотрицательного целого $j \leq 2^{n-1}$ существует матрица $A \in \mathfrak{A}_n$ такая, что $per(A) = j$.*

Определим понятие верхней границы подряд идущих значений перманента.

Определение 2. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Назовём число $B_n \in [0, n!]$ верхней границей подряд идущих значений перманента для матриц из $\mathfrak{A}_n$, если B_n — наименьшее натуральное число со свойством, что в $\mathfrak{A}_n$ нет матрицы с перманентом $B_n + 1$.

Таким образом, согласно Теореме 1, число 2^{n-1} является оценкой снизу для B_n. В докладе будет представлен следующий результат.

Теорема 2. *Для любого целого $n \geq 6$ верно, что $B_n \geq \frac{67}{64} 2^n$.*

Слова благодарности

Автор благодарен своему научному руководителю профессору А.Э. Гутерману за постановку задачи, постоянное внимание к работе и ценные обсуждения. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ 15-01-01132.

Источники и литература

1) R.A. Brualdi, M. Newman, *Some theorems on permanent.* — J. Res. Natl. Bur. Stand., Sect. B **69B**, No. 3 (July–September 1965), 159–163.