Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

О нулях функции перманента над конечным полем

Научный руководитель – Гутерман Александр Эмильевич

Спиридонов Игорь Александрович
Абитуриент
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: spiridonovia@ya.ru

Перманент и определитель матрицы $A = (a_{ij})$ размера $n \times n$ с коэффициентами из поля задаются следующим образом:

$$per A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \qquad \text{и} \qquad \det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)},$$

соответственно, где $\mathfrak{S}_n$ обозначает симметрическую группу перестановок множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, величина $sgn(\sigma) \in \{-1, 1\}$ — знак перестановки σ.

Если коэффициенты матрицы принадлежат полю характеристики 2, то эти инварианты совпадают. В противном случае существуют полиномиальные алгоритмы вычисления определителя, тогда как задача вычисления перманента $\sharp P$-полна, см. [2]. Сравнивая приведенные формулы, Полиа в 1913г. поставил вопрос о возможности вычисления перманента при использовании определителя. Этой тематике посвящен ряд работ, см. [2]. В частности, в работе [1] доказана невозможность биективной (не обязательно линейной) конвертации перманента в определитель над конечным полем $\mathbf{F}_q$, основанная на получении нижней оценки для числа P_n различных матриц с ненулевым перманентом:

$$P_n \geq \frac{q^{2n} - q^{n+1} - q^n + 2q - 1}{q^{2n} - q^{n+1} - q^n + q} \prod_{k=1}^{n} (q^n - q^{k-1}),$$

где q — число элементов поля, см. [1], теорема 2.16.

В представленной работе получено усиление приведенной оценки. Здесь $\mathbf{F}_q$ — конечное поле, $|\mathbf{F}_q| = q$, $\operatorname{char} \mathbf{F}_q = \chi \neq 2$. Доказательство основано на следующем комбинаторном результате:

Теорема 1. *Пусть G — полный d-мерный гиперграф, содержащий хотя бы $2d+1$ вершину, ребрам которого приписаны веса из поля $\boldsymbol{F}_q$. Предположим, что $d+1$ не кратно χ, и для любого подграфа $T \subset G$, удовлетворяющего условию $|T| = d+1$, справедливо, что сумма весов на всех ребрах, принадлежащих T, равняется нулю. Тогда веса всех ребер G равны нулю.*

В качестве следствия получена следующая теорема:

Теорема 2. *Пусть $n \geq 3$. Положим $p = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ Тогда если p не кратно χ, то*

$$P_n \geq \frac{q^{2n} - q^{n+p} - q^n + q^{p+1} - q + 1}{q^{2n} - q^{n+p} - q^n + q^p} \prod_{k=1}^{n} (q^n - q^{k-1}),$$

а если p кратно χ, то

$$P_n \geq \frac{q^{2n} - q^{n+p-1} - q^n + q^p - q + 1}{q^{2n} - q^{n+p-1} - q^n + q^{p-1}} \prod_{k=1}^{n} (q^n - q^{k-1}).$$

Полученная в представленной работе оценка на разность между P_n и числом различных матриц над полем $\mathbf{F}_q$ с ненулевым определителем, равным, как известно,

$$D_n = \prod_{k=1}^{n} (q^n - q^{k-1}),$$

асимптотически (при больших n) превосходит оценку на ту же самую величину, полученную в [1], в q^p раз в случае, если p не кратно χ, и в q^{p-1} раз в случае, если p кратно χ.

Источники и литература

1) Guterman A.E. , Budrevich M. Permanent has less zeros than determinant over finite fields // Contemporary Mathematics. — 2012. — Vol. 579. — P. 33–42.

2) McCuaig W. Polya's permanent problem // The Electronic Journal of Combinatorics 11 (2004), R79.