Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Верхняя оценка на скрамблинг-индекс для непримитивных ориентированных графов

Научный руководитель – Гутерман Александр Эмилевич

Максаев Артем Максимович

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,

Механико-математический факультет, Кафедра высшей алгебры, Москва, Россия

E-mail: artmak95@mail.ru

В 2009 году Акельбек и Киркланд (см. [1]) ввели понятие скрамблинг-индекса ориентированного графа G, обозначаемого через $k(G)$. Согласно их определению, $k(G)$ равно наименьшему натуральному k, такому что для любых двух вершин a и b графа G найдется третья вершина u, для которой есть ориентированные пути длины k из a в u и из b в u. Это определение является важным для некоторых приложений, особенно в теории неотрицательных матриц. В частности, скрамблинг-индекс связан с известным коэффициентом Добрушина (или дельта-коэффициентом), который применяется, например, для исследования ряда свойств цепей Маркова (см. [2], [3]).

В статье [1] установлена верхняя оценка на скрамблинг-индекс примитивного ориентированного графа. А именно, показано, что $k(G) \leqslant \left\lceil \frac{(n-1)^2+1}{2} \right\rceil$, где n — порядок графа G.

Нетрудно видеть, что определение скрамблинг-индекса без изменений распространяется на более широкий класс ориентированных графов, нежели примитивные графы. Целью настоящей работы является описание этого класса графов, а также исследование зависимости максимального значения скрамблинг-индекса от параметров графа. Ниже представлены две теоремы, частично отвечающие на поставленные выше вопросы.

Теорема 1. Скрамблинг-индекс ориентированного графа корректно определен тогда и только тогда, когда найдется примитивный ориентированный подграф D графа G, удовлетворяющий следующему условию: для каждой вершины графа G найдется ориентированный путь, ведущий из данной вершины в некоторую вершину подграфа D.

Теорема 2. Если ориентированый граф G порядка $n \geqslant 3$, для которого корректно определен скрамблинг-индекс, не является примитивным, то

$$k(G) \leqslant 1 + \left\lceil \frac{(n-2)^2+1}{2} \right\rceil.$$

Кроме того, будет представлено описание всех непримитивных ориентированных графов, для которых достигается равенство в последней теореме.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 15-01-01132.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, Александру Эмилевичу Гутерману, за плодотворные обсуждения и совместную работу над данной темой.

Источники и литература

1) M. Akelbek, S. Kirkland. Coefficients of ergodicity and scrambling index, Linear Algebra Appl. 430 (2009) 1111-1130.
2) E. Seneta. Nonnegative Matrices and Markov Chains, Springer-Verlag, New York, 1981.
3) A. Paz. Introduction to Probabilistic Automata, Academic Press, New York, 1971.