Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Оценки длин локально-комплексных алгебр

Научный руководитель – Гутерман Александр Эмилевич

Кудрявцев Дмитрий Константинович
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: kdk97@rambler.ru

Рассмотрим конечномерную не обязательно ассоциативную алгебру A над полем $\mathbb{R}$. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — конечный набор ее элементов.

Словом длины k для этой системы называется произведение $a_{i_1} * \ldots * a_{i_k}$ с произвольным порядком выполнения умножений, где $i_m \in \{1, \ldots, n\}$. Обозначим через L_k линейную оболочку над $\mathbb{R}$ всех слов длины не более k.

Говорят, что система элементов $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *порождает алгебру* A, если $\exists k$, такое что L_k совпадает с A. Самое маленькое такое k называется *длиной* данной системы.

Длиной алгебры A называется максимальная длина системы среди всех конечных систем, порождающих A.

Алгебра A называется локально-комплексной, если $\forall a \in A \backslash \mathbb{R}$ элемент a порождает алгебру, изоморфную алгебре комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Заметим, что если алгебра A ассоциативна, то из $L_k = L_{k+1}$ следует, что для всех $m > k$ выполняется $L_k = L_m$, т.е. порождаемые множества стабилизируются. В неассоциативном случае это не обязательно верно.

Утверждение 1. Для $n \geq 1$, из $\dim L_k = \dim L_{k+1} = ... = \dim L_{2k}$ следует наступление стабилизации системы, т.е. что для всех $m > k$ выполняется $L_k = L_m$.

Утверждение 2. Для $n \geq 2$, из $\dim L_k = \dim L_{k+1} = ... = \dim L_{2k-1}$ и $\dim L_{k-1} + 1 = \dim L_k$ следует наступление стабилизации системы, т.е. что для всех $m > k$ выполняется $L_k = L_m$.

Особенность рассматриваемого класса алгебр состоит в том, что утверждение 2 не обязательно верно для алгебры, не являющейся локально-комплексной, в то время как утверждение 1 выполняется для всех алгебр.

Пример. Рассмотрим алгебру над $\mathbb{R}$ со следующей таблицей умножения базисных элементов (e_0 - это единица в $\mathbb{R}$):

	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_2	0	0
e_2	e_2	0	e_3	0
e_3	e_3	0	0	0

и порождающую систему $\{e_1\}$. Для нее $\dim L_1 = 2$, $\dim L_2 = 3$, $\dim L_3 = 3$, но стабилизации не наступает ($\dim L_4 = 4$).

Источники и литература

1) A.E. Guterman, O.V. Markova, *Commutative matrix subalgebras and length function.* — Linear Algebra Appl. **430**(2009), 1790–1805.

2) Bresar, M., Semrl, P., Spenko, S. *On locally complex algebras and low-dimensional Cayley-Dickson algebras* // J. Algebra - 2011 - vol. 327, no. 1, pp. 107-125