Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

Вероятности высоких максимумов гауссовских полей

Научный руководитель – Питербарг Владимир Ильич

Владимиров Александр Андреевич
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия
E-mail: r1be@yandex.ru

Пусть $X(\mathbf{t})$ - гауссовское поле с п.н. непрерывными траекториями. Интересной является задача изучения асимптотического поведения вероятности высоких максимумов данного поля

$$P(\max_{\mathbf{t}\in T} X(\mathbf{t}) > u), u \to \infty.$$

В подобных задачах эффективным методом отыскания точных асимптотических оценок является метод двойных сумм. Суть данного метода заключается в поиске точной асимптотики вероятности на бесконечно малых интервалах, после чего доказывается, что вероятность неоднократных выбросов траекторий исследуемого поля достаточно мала по сравнению с вероятностью однократных выбросов.
Эта задача в достаточно общих условиях рассмотрена в [1]. Однако остается весьма широкий класс гауссовских полей с похожим поведением вторых моментов, которые не удовлетворяют введенным в [1] условиям. Один из примеров таких полей рассмотрен в докладе.
Пусть $X(\mathbf{t})$, $\mathbf{t} \in T \subset \mathbb{R}^3$, - центрированное гауссовское поле с п.н. непрерывными траекториями, такое, что его вариационная функция $\sigma(\mathbf{t})$ достигает своего максимального значения σ в единственной внутренней точке $\mathbf{t}_0$ множества T. Ковариационная функция $r(\mathbf{s},\mathbf{t})$ и функции вариации $\sigma(\mathbf{t})$ данного поля удовлетворяют условиям:

C1

$$\sigma(\mathbf{t}) = 1 - |t_1|^{\beta_1} - |t_2|^{\beta_2} - |t_3|^{\beta_3} + o(||\mathbf{t}||_{\boldsymbol{\beta}}), \quad \mathbf{t} \to \mathbf{t}_0.$$

C2

$$r(\mathbf{s},\mathbf{t}) = 1 - |t_1 - s_1|^{\alpha_1} - |t_2 - s_2|^{\alpha_2} - |t_3 - s_3|^{\alpha_3} + o(||\mathbf{t} - \mathbf{s}||_{\boldsymbol{\alpha}}), \quad \mathbf{s},\mathbf{t} \to \mathbf{t}_0.$$

При этом:

$$\alpha_1 < \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2, \quad \alpha_3 > \beta_3.$$

В этих условиях получена точная асимптотика исследуемой вероятности, а именно доказана лемма:

Лемма 1.

$$P(\max_{\mathbf{t}\in T} X(\mathbf{t}) > u) = 2H_1H_2u^{2/\alpha_1 - 2/\beta_1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}u}e^{-\frac{u^2}{2}}(1 + o(1))$$

при $u \to \infty$*, где* H_{α_1}, $H^{d^{-1}}_{\alpha_2,\beta_2}$ *- константы Пикандса и*

$$H_1 = \frac{2}{\beta_1}\Gamma(1/\beta_1)H_{\alpha_1}, \quad H_2 = \lim_{S\to\infty} H^{d^{-1}}_{\alpha_2,\beta_2}(-S/2, S/2)$$

Источники и литература

1) Piterbarg Vladimir I., Asymptotic Methods in the Theory of Gaussian Processes and Fields. United States, 2012.