Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

Большие выбросы процессов гауссовского хаоса: аппроксимация в дискретном времени.

Научный руководитель – Питербарг Владимир Ильич

Жданов Александр Иванович
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия
E-mail: zhdanova_ e@mail.ru

Пусть $g(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$ – однородная функция положительного порядка $\beta > 0$, то есть для всех $a > 0$ и всех векторов $\mathbf{x}$ выполнено $g(a\mathbf{x}) = a^\beta g(\mathbf{x})$. Рассмотрим гауссовский стационарный векторный процесс с нулевым средним $\boldsymbol{\xi}(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, принимающий значения в $\mathbb{R}^d$. В работе изучается асимптотическое поведения вероятности высоких выбросов *процесса гауссовского хаоса* $g(\boldsymbol{\xi}(t))$

$$P\Big(\max_{t\in[0,p]} g(\boldsymbol{\xi}(t)) > u\Big), \quad p > 0, \tag{1}$$

при больших u: $u \to \infty$.

Одним из эффективных методов решения подобных задач является метод двойных сумм, существенно развитый в [1], где был рассмотрен случай независимых и одинаково распределенных компонент $\boldsymbol{\xi}(t)$, ковариационная функция которых удовлетворяет условию Пикандса. Вместе с тем, применение для зависимых компонент техники, развитой в [1], наталкивается на ряд весьма серьезных технических трудностей, в особенности на втором этапе доказательства, при оценивании двойных сумм в ключевом неравенстве Бонферрони. В работе предлагается новый подход к оцениванию двойной суммы, основанный на переходе к дискретному времени со сгущающейся определенным образом решеткой.

Предполагается, что ковариационная функция векторного процесса $\boldsymbol{\xi}(t)$ удовлетворяет многомерному аналогу условия Пикандса

$$R(t) = R - |t|^\alpha C + |t|^\alpha o(1), \ t \to 0, \ \alpha \in (0, 2], \tag{2}$$

для некоторых симметричных и положительно определенных матриц R, C и, более того, $0 \prec R(t) \prec R$ для всех $t \in (0, p]$. Здесь $o(1)$– матрица размера $d\times d$, компоненты которой стремятся к нулю при $t \to 0$. Можно показать, что достаточно рассмотреть случай, когда матрица R– единичная, в то время как C– диагональная (с положительными диагональными элементами), что и будет предполагаться в дальнейшем.

Введем обозначения, необходимые для формулировки основного результата. Рассмотрим сферические координаты $\mathbf{x} = (r, \boldsymbol{\varphi})$, где $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_{d-1}) \in \Pi_{d-1} = [0, \pi)^{d-2} \times [0, 2\pi)$– угловые координаты вектора $\mathbf{x}$ и $r = |\mathbf{x}|$. Пусть $J(r, \boldsymbol{\varphi})$– Якобиан такого перехода. Будем писать $g(\boldsymbol{\varphi}) = g(\mathbf{x}/|\mathbf{x}|)$. Обозначим

$$g := \max_{\boldsymbol{\varphi}\in\Pi_{d-1}} g(\boldsymbol{\varphi}), \ \mathcal{M}_{\boldsymbol{\varphi}} := \{\boldsymbol{\varphi} \in \Pi_{d-1} : g(\boldsymbol{\varphi}) = g\},$$

и пусть m– размерность многообразия $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\varphi}}$. Введем функцию $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\varphi})$ на Π_{d-1} соотношением $g(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\varphi})) = 1$, если $g(\boldsymbol{\varphi}) > 0$ и $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\varphi}) = 0$, если $g(\boldsymbol{\varphi}) \leq 0$. В некоторых предположениях на регулярность функции $g(\boldsymbol{\varphi})$ в окрестности $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\varphi}}$ введем функцию

$$j(\boldsymbol{\varphi}) = \frac{J(1,\boldsymbol{\varphi})|\det g''(\boldsymbol{\varphi})_{d-1-m}|^{-1/2}}{\int_{\mathcal{M}_{\boldsymbol{\varphi}}} J(1,\boldsymbol{\varphi})|\det g''(\boldsymbol{\varphi})_{d-1-m}|^{-1/2} dV_{\boldsymbol{\varphi}}},$$

где $dV_{\boldsymbol{\varphi}}$– элементарный объем в $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\varphi}}$. Наконец, обозначим

$$H_\alpha(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\varphi}}) = H_\alpha \int_{\mathcal{M}_{\boldsymbol{\varphi}}} j(\boldsymbol{\varphi})\langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\varphi}), C\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\varphi})\rangle^{1/\alpha} dV_{\boldsymbol{\varphi}}.$$

Здесь и далее, если $m = 0$, интеграл по $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\varphi}}$ понимается как (конечная) сумма по всем точкам $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{M}_{\boldsymbol{\varphi}}$.

Теорема 1. *При некоторых условиях на регулярнось функции $g(\boldsymbol{\varphi})$ в окрестности $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\varphi}}$ и структуру многообразия $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\varphi}}$*

$$P\Big(\max_{t\in[0,p]} g(\boldsymbol{\xi}(t)) > u\Big) = p h_0 H_\alpha(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\varphi}}) g^{\frac{1-m}{\beta}} u^{\frac{m-1+2/\alpha}{\beta}} e^{-\frac{1}{2}(u/g)^{2/\beta}}(1+o(1))$$

при $u \to \infty$, где h_0– константа, зависящая от $g(\boldsymbol{\varphi})$, α, β, d и m.

Отметим, что в частном случае $C = cI_d,\ c > 0$ где I_d– единичная матрица, утверждение теоремы можно переписать в виде

$$P\Big(\max_{t\in[0,p]} g(\boldsymbol{\xi}(t)) > u\Big) = c^{1/\alpha} p h_0 H_\alpha g^{\frac{1-m-2/\alpha}{\beta}} u^{\frac{m-1+2/\alpha}{\beta}} e^{-\frac{1}{2}(u/g)^{2/\beta}}(1+o(1))$$

при $u \to \infty$. Аналогичное соотношение в случае независимых и одинаково распределенных компонент $\boldsymbol{\xi}(t)$ выведено в [1], однако в случае зависимых компонент $\boldsymbol{\xi}(t)$ техника доказательства на этапе оценки двойных сумм существенно усложнилась.

Автор выражает глубокую признательность профессору Владимиру Ильичу Питербаргу за постановку задачи и полезные обсуждения.

Источники и литература

1) Piterbarg Vladimir I. High extrema of Gaussian chaos processes. *Extremes,* 19(2), 1–20, 2016.