Секция «Геометрия и топология»

Задача о качении сферы и критерий замкнутости

Научный руководитель – Ошемков Андрей Александрович

Пономарёв Владимир Владимирович

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия

E-mail: boba1997@yandex.ru

В теории оптимального управления хорошо известна задача о качении сферы по другой поверхности (без проскальзываний и прокручиваний). Для нее возможны различные постановки. Например, можно минимизировать длину кривой, по которой катится сфера, при условии, что положение сферы в начальной и конечной точке фиксировано. Как оказалось, задача о качении сферы по плоскости тесно связана с задачей об эластиках Эйлера [1]. Связь между этими задачами исследована в работе [2].

Мы рассматриваем задачу о качении сферы по плоскости в случае, когда кривая на плоскости, по которой катится сфера, замкнута, а у сферы в начальном и конечном положении нижняя точка одна и та же. Вопрос состоит в том, чтобы описать такие кривые.

Ясно, что при качении сферы по плоскости на ней тоже возникает кривая. Поэтому задачу можно переформулировать так: найти все замкнутые кривые на плоскости, для которых соответствующие кривые на сфере также замкнуты.

В данной работе мы рассматриваем ломаные, так как для их исследования можно воспользоваться удобными инструментами, описанными ниже.

Определение. Ежом ориентированной ломаной называется сумма векторов нормалей к звеньям с длинами, равными длинам звеньев, образующие с соответствующими исходными векторами-звеньями пары с одинаковой ориентацией.

Теорема. Ломаная замкнута на плоскости тогда и только тогда, когда её ёж нулевой.

Определение. Кватернионом называют формальную линейную комбинацию элементов множества: 1, i, j, k с коэффициентами из поля действительных чисел.

Как показывает практика, с их помощью удобно задавать ортогональные преобразования трёхмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$.

Теорема. Ломаная на сфере замкнута тогда и только тогда, когда результирующий кватернион задаёт вращение только вокруг вертикальной оси.

Итог. Объединив эти две теоремы, получим критерий замкнутости ломаной на плоскости и сфере удобный для применения в конкретных случаях. При помощи этого критерия моя коллега Рембовская А. Ю. доказала незамкнутость треугольников и четырёхугольников со сторонами, отличными от 2π. Однако, позднее нами была обнаружена целая серия примеров замкнутых ломаных, таким образом, полного описания пока нет.

Источники и литература

1) Л. Эйлер, Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума или минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле, Леонарда Эйлера, королевского профессора и члена Императорской Петербургской Академии Наук, Приложение I, «Об упругих кривых», ГТТИ, Москва-Ленинград, 1934.
2) V. Jurdjevic, Geometric Control Theory, Cambridge University Press, 1997