Секция «Геометрия и топология»

Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем на поверхностях вращения в магнитном поле

Научный руководитель – Фоменко Анатолий Тимофеевич

Климов Роман Кириллович
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия
E-mail: klroman95@mail.ru

Рассмотрим риманово многообразие, гомеоморфное сфере, $M \simeq S^2$ с метрикой g, на которой эффективно действует группа S^1. Такая метрика называется метрикой вращения, а многообразие M – многообразием вращения. Пусть N и S – неподвижные точки действия группы. Назовем их соответственно северным и южным полюсами многообразия M. Метрику g можно записать в виде $ds^2 = dr^2 + f^2(r)d\varphi^2$, где $f(r) : [0, L] \to \mathbb{R}$ – функция, положительная на $(0, L)$, с условиями $f(0) = f(L) = 0$. Рассмотрим натуральную механическую систему на кокасательном расслоении T^*M к M со стандартной симплектической структурой $\omega = dp \wedge dq$ и гамильтонианом $H = \frac{1}{2}g^{ij}(q)p_i p_j$. Хорошо известно, что такая система интегрируема и ее интегральные траектории $q(t)$ являются решением уравнения геодезических $\nabla_{\dot{q}}\dot{q} = 0$. Больший интерес представляет изучение систем похожего вида с добавлением потенциального и магнитного полей. Случай потенциального поля широко изучен в работах Е. О. Кантонистовой (см. [1,2]). В случае движения частицы по многообразию вращения в магнитном поле возникает следующая система:

$$H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{(p_\varphi - \Lambda(r))^2}{2f^2(r)}; K = p_\varphi,$$

здесь H – интеграл энергии, K – дополнительный первый интеграл, $\Lambda(r)$ – гладкая функция магнитного поля.

В работе, при наложении естественных дополнительных условий на $f(r)$ и $\Lambda(r)$, исследована бифуркационная диаграмма отображения момента системы, проверена невырожденность и установлен тип точек ранга $0, 1$, построен бифуркационный комплекс.

Источники и литература

1) Кантонистова Е. О. Лиувиллева классификация интегрируемых гамильтоновых систем на поверхностях вращения // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2015. — № 5. — С. 41–44.

2) Кантонистова Е. О. Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем на поверхностях вращения в потенциальном поле // Математический сборник. — 2016. — Т. 207, № 3. — С. 47–92.

3) Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Т. 1, 2. Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999.