Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Динамические свойства одного класса импульсных систем

Научный руководитель – Глызин Сергей Дмитриевич

Ивановский Леонид Игоревич
Аспирант
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия
E-mail: leon19unknown@gmail.com

Рассмотрим цепочку из трех связанных, сингулярно возмущенных осцилляторов с запаздыванием

$$\dot{u_j} = d(a_1 u_{j-1} - a_2 u_j + u_{j+1}) + \lambda(-1 + \alpha f(u_j(t-1)) - \beta g(u_j))u_j, \quad j = \overline{1,3}, \tag{1}$$

где $u_j = u_j(t) > 0$, $a_1, a_2 \in \{0, 1, 2\}$, $\lambda \gg 1$, $\beta > 0$, $\alpha > 1 + \beta$, $f(u), g(u) \in C^2(\mathbb{R}_+)$, $0 < \beta g(u) < \alpha$, $f(0) = g(0) = 1$ и $f(u), g(u), uf'(u), ug'(u) = O(1/u)$ при $u \to +\infty$. Изучаются три вида систем (1) для различных значений a_1, a_2 и краевых условий на u_0, u_4: a) $a_1 = 1, a_2 = 2, u_0 = u_1, u_3 = u_4$; b) $a_1 = 1, a_2 = 2, u_0 = u_3, u_1 = u_4$; c) $a_1 = 0, a_2 = 1, u_1 = u_4$.

В статье [1] было доказано, что систему (1) можно свести к двумерной системе дифференциальных уравнений без малых параметров, но с импульсными воздействиями

$$\begin{aligned} \dot{y_1} &= d(e^{y_2} + a_1 e^{-y_1} - e^{y_1} - a_1 e^{-y_0}) \\ \dot{y_2} &= d(e^{y_3} + a_1 e^{-y_2} - e^{y_2} - a_1 e^{-y_1}) \end{aligned} \tag{2}$$

$$y_j(+0) = \frac{\alpha - 1}{\alpha - \beta - 1} y_j(-0), \quad y_j(1+0) = y_j(1-0) - \frac{\alpha}{\alpha - 1} y_j(+0),$$

$$y_j(\alpha + 0) = (1 + \beta) y_j(\alpha - 0), \quad y_j(\alpha + 1 + 0) = y_j(\alpha + 1 - 0) - \frac{\alpha}{1 + \beta} y_j(\alpha + 0).$$

Значения y_0 и y_3 зависят от условий на u_0 и u_4: a) $u_0 = u_1, u_3 = u_4$: $y_0 = y_3 = 0$; b) $u_0 = u_3, u_1 = u_4$: $y_0 = y_3 = -(y_1 + y_2)$; c) $u_1 = u_4$: $y_3 = -(y_1 + y_2)$.

В статье [1] было показано, что экспоненциально устойчивым неподвижным точкам отображения

$$\Phi(z) : \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} y_1(T_0) \\ y_2(T_0) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

соответствуют орбитально асимптотически устойчивые циклы системы (1) . Для функций y_1, y_2, связанных с начальными переменными приближенными равенствами $y_1 \approx \ln \frac{u_2}{u_1}, y_2 \approx \ln \frac{u_3}{u_2}$, заданы условия $y_1(-0) = z_1, y_2(-0) = z_2$. $T_0 = \alpha + 1 + (\beta + 1)/(\alpha - \beta - 1)$ определяет главную часть периода устойчивого цикла одиночного осциллятора системы (1).

Асимптотический анализ показывает, что при малом d, отображение (3) имеет хотя бы четыре устойчивые неподвижные точки. Задача численного исследования состояла в поиске таких значений α и β, при которых отображение (3) имеет большее число устойчивых режимов. Также изучались вопросы перестроек, происходящих в фазовом пространстве отображения Φ. В результате, как и в статье [2], для нескольких видов импульсных систем были выделены области, соответствующие различным бифуркационным сценариям и были установлены множества значений начальных параметров, при которых возможно сосуществование большего числа устойчивых режимов.

Источники и литература

1) Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Релаксационные автоколебания в сетях импульсных нейронов // УМН. 2015. Т. 70, вып. 3 (423). С. 3–76.

2) Ивановский Л. И. Устойчивые режимы динамических систем с импульсными воздействиями // Динамические системы. 2016. Т. 6 (34), №2. С. 113–132.