Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Задача с динамическими граничными условиями для гиперболического уравнения

Научный руководитель – Пулькина Людмила Степановна

Киричек Виталия Александровна
Студент (специалист)
Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, Самара, Россия
E-mail: Vitalya29@gmail.com

В работе рассматривается гиперболическое уравнение

$$u_{tt} - (a(x,t)u_x)_x + c(x,t)u = f(x,t) \tag{1}$$

и ставится следующая задача: найти в области $Q_T = (0,l) \times (0,T)$ решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным данным

$$u(x,0) = \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x)$$

и динамическими граничными условиями

$$u_x(0,t) = \alpha(t)u_t(0,t), \quad u_x(l,t) = \beta(t)u_t(l,t).$$

Граничные условия такого вида отражают присутствие некоего демпфирующего устройства в модели колебаний струны или стержня [1]. Доказано существование единственного обобщенного решения поставленной задачи, которое понимается как функция $u \in W_2^1(Q_T)$, удовлетворяющая тождеству

$$\int_0^T \int_0^l (-u_t v_t + a u_x v_x + cuv)dxdt = \int_0^l \psi(x)v(x,0)dx + \int_0^T \int_0^l fvdxdt$$

$$+ \int_0^T a(0,t)\alpha(t)u_t(0,t)v(0,t)dt - \int_0^T a(l,t)\beta(t)u_t(l,t)v(l,t)dt +$$

для всех $v \in W_2^1(Q_T), v(x,T) = 0$. Удалось ослабить условия на функции $\alpha(t), \beta(t)$ и их производные, обеспечивающие единственность решения, полученные ранее в статье [2].