Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Гладкостные свойства потенциала Рисса переменного порядка при отображении суммируемой функции

Научный руководитель – Вакулов Борис Григорьевич

Дроботов Юрий Евгеньевич

Аспирант

Южный федеральный университет, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, Ростов-на-Дону, Россия

E-mail: yu.e.drobotov@yandex.ru

В настоящей работе рассматривается оператор типа потенциала Рисса переменного порядка $\alpha(\cdot)$ с характеристикой $c(\cdot)$, имеющий вид:

$$\left(I_{\Omega}^{\alpha(\cdot)}cf\right)(x) := \int\limits_{\Omega} \frac{c(x,y)f(y)}{r^{n-\alpha(x)}(x,y)}dy, \tag{1}$$

где $\forall x \in \Omega\ \alpha(x) \neq n, n+2, n+4, ...$, функция $r(\cdot)$ является метрикой на Ω, а значение n зависит от Ω. В задачи работы входит исследование условий ограниченности оператора (1) для характеристики, тождественно равной единице, и характеристики специального вида в пространствах обобщённой переменной гёльдеровости при отображении суммируемой функции.

Пространства обобщённой переменной гёльдеровости $H^{\omega(\cdot)}(\Omega)$ существенны для определения понятия гладкости. В терминах локального модуля непрерывности

$$M_r(f,t,x) := \sup_{y\in\Omega: r(x,y)\leq t} |f(x)-f(y)|$$

они определяются как множества функций, удовлетворяющих условию

$$\forall x \in \Omega, \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad M_r(f,t,x) \leq C\omega(x,t),$$

где постоянная $C > 0$, а функция $\omega(\cdot)$ носит название характеристики.

В рамках настоящей работы доказан следующий результат для сферического потенциала Рисса переменного порядка $I_{\mathbb{S}^n}^{\alpha(\cdot)}$, где $\mathbb{S}^n$ – сфера единичного радиуса в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$:

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $\min\limits_{x\in\mathbb{S}^n} Re[\alpha(x)] > \frac{n}{p}$;
2) $\max\limits_{x\in\mathbb{S}^n} Re[\alpha(x)] < \frac{n}{p} + 1$;
3) $\alpha \in H^{\alpha(\cdot)-\frac{n}{p}}(\mathbb{S}^n)$.

Тогда $I_{\mathbb{S}^n}^{\alpha(\cdot)}$ *ограничен из* $L^p(\mathbb{S}^n)$ *в* $H^{\alpha(\cdot)-\frac{n}{p}}(\mathbb{S}^n)$.

Стереографическим проектированием результат теоремы 1 переносится на случай пространственного оператора (1), где $\Omega = \dot{\mathbb{R}}^n$, $\dot{\mathbb{R}}^n$ – пространство $\mathbb{R}^n$ с компактификацией Александрова.

С использованием, в частности, данных результатов, оператор (1) рассматривается в весовых обобщённых гранд-пространствах Лебега

$$L_a^{p),\theta} := \left\{ f : \|f\|_{L_a^{p),\theta}(\Omega,w)} := \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{\theta}{p-\varepsilon}} \|f\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega,wa^{\varepsilon})} \right\}, \quad \theta > 0,$$

где Ω является множеством не обязательно конечной меры: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, а функция $a(\cdot)$ – весовая.

Источники и литература

1) Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.

2) Дроботов Ю. Е. Потенциал Рисса переменного порядка в пространствах обобщённой переменной гёльдеровости // В Материалах Международного молодёжного научного форума „ЛОМОНОСОВ-2016“, М.: МАКС Пресс, 2016.

3) Умархаджиев С. М., Дроботов Ю. Е. Потенциал Рисса в обобщённых гранд-пространствах Лебега // Вестник Академии наук Чеченской Республики. 2015. №4. С. 26–29.