Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

О построении примера асимптотического разложения функционального интеграла

Научный руководитель – Шавгулидзе Евгений Тенгизович

Кравцева Анна Константиновна

Кандидат наук

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра математического анализа, Москва, Россия

E-mail: anna-conf@yandex.ru

Строится пример асимптотического разложения функционального интеграла. Методы, применённые в работе могут быть использованы при вычислении асимптотики интегралов, описывающих решения эволюционных уравнений. Рассмотрим интеграл $F(\lambda) = \int\limits_E \exp\left\{\lambda i \int\limits_0^\pi \left(\frac{1}{2}(x'(\tau))^2 - \frac{1}{4}(x(\tau)(\varepsilon x(\tau)+1))^2 - \varepsilon^3 x(\tau)\right) d\tau\right\} dx$, зависящий от большого положительного параметра λ.

Здесь $E = \left\{x \in C([0,\pi])\colon x(0) = \frac{1}{1-\varepsilon},\ x(\pi) = -\frac{1}{1+\varepsilon}\right\}$ — пространство непрерывных траекторий с фиксированными значениями на концах отрезка.

Пусть z_0 — комплекснозначное решение уравнения Эйлера – Лагранжа для функционала $\int\limits_0^\pi \left(\frac{1}{2}(x'(\tau))^2 - \frac{1}{4}(x(\tau)(\varepsilon x(\tau)+1))^2 - \varepsilon^3 x(\tau)\right) d\tau$, удовлетворяющее краевым условиям $z_0(0) = \frac{1}{1-\varepsilon}$, $z_0(\pi) = -\frac{1}{1+\varepsilon}$. Построим гильбертово пространство H_δ, в котором полином $\int\limits_0^\pi (x(\tau))^4 d\tau$ будет непрерывным ([1]). Затем, применяя результаты работы [2], получаем следующую теорему.

Теорема 1.

Пусть операторы T и B определяются равенствами $(T^{-1}y_1, y_2) = \int\limits_0^\pi y_1'(\tau) y_2'(\tau) d\tau$, $(By_1, y_2) = -\int\limits_0^\pi (6\varepsilon^2(z_0(\tau))^2 + 6\varepsilon z_0(\tau) + 1) y_1(\tau) y_2(\tau) d\tau$. Тогда при достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\det(I+TB)}} \exp\left\{\lambda i \int\limits_0^\pi \left(\frac{1}{2}(z_0'(\tau))^2 - \frac{1}{4}(z_0(\tau)(\varepsilon z_0(\tau)+1))^2 - \varepsilon^3 z_0(\tau)\right) d\tau\right\} \times$$
$$\times \left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right).$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 14-01-00516 А).

Источники и литература

1) Kravtseva A.K. Infinite-dimensional evolution equations and the representation of their solutions in the form of Feynman integrals // Russian Journal of Mathematical Physics. 2013. Vol. 20. No. 2. P. 189-213.
2) Kravtseva A.K., Smolyanov O.G., Shavgulidze E.T. Asymptotic expansions of Feynman integrals of exponentials with polynomial exponent // Russian Journal of Mathematical Physics. 2016. Vol. 23. No. 4. P. 490-508.