Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Свойства емкостей из классов Соболева на метрических пространствах с мерой

Научный руководитель – Кротов Вениамин Григорьевич

Бондарев Сергей Александрович
Аспирант
Белорусский государственный университет, Механико-математический факультет, Минск, Беларусь
E-mail: bsa0393@gmail.com

Исследуются свойства $\mathrm{Cap}_{\alpha,p}$–емкостей, порожденных классами Соболева $M^p_\alpha(X)$ на метрических пространствах с мерой, удовлетворяющей условию удвоения. Принципиальным является случай $p<1$, не исследованный ранее.

Пусть (X,d) — метрическое пространство с метрикой d, а регулярная борелевская мера μ удовлетворяет условию удвоения, т.е. для любых шаров $B(x,r)$ и $B(x,R)$, $R>r$, выполнено

$$\mu\big(B(x,R)\big)\le a_\mu\left(\frac{R}{r}\right)^\gamma\mu\big(B(x,r)\big)$$

для некоторых постоянных a_μ и γ. Тройка (X,d,μ) в этом случае называется пространством однородного типа, а число γ играет роль размерности.

Пусть $\alpha>0$ и $0<p<\infty$. Пространство Соболева M^p_α на метрическом пространстве X состоит из множества функций (классов эквивалентности) $f\in L^p(X)$, для которых существует неотрицательная функция $g\in L^p(X)$, такая, что неравенство

$$|f(x)-f(y)|\leqslant[d(x,y)]^\alpha[g(x)+g(y)] \qquad (1)$$

выполнено почти всюду. На $M^p_\alpha(X)$ вводится (квази)норма

$$\|f\|_{M^p_\alpha(X)}=\|f\|_{L^p(X)}+\inf\{\|g\|_{L^p(X)}\},$$

где inf берется по всем неотрицательным функциям $g\in L^p(X)$, удовлетворяющим условию (1). Пространства M^p_α порождают емкости

$$\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(E)=\inf\{\|f\|^p_{M^p_\alpha(X)}:f\geqslant1 \text{ на } E\subset X\}.$$

Емкости (наряду с мерой и размерностью Хаусдорфа) являются «измерителями» массивности исключительных множеств в задачах теории тонких свойств функций. Так, они естественным образом возникают в задачах о точках Лебега (см. [1]) и аппроксимации Лузина (см. [2]).

Свойства емкостей при $p>1$ устанавливаются в [3]. Оказывается, что большинство результатов также сохраняется и при $0<p\leqslant1$, $0<\alpha\leqslant1$. Справедлива следующая теорема (c обозначает некоторую положительную постоянную, точное значение которой для нас несущественно)

Теорема.

1) Емкость $\mathrm{Cap}_{\alpha,p}$ является внешней мерой и

$$\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(E)=\inf\{\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(O):E\subset O, O \text{ — открыто}\}.$$

2) Для любого $E\subset X$ и $0<\beta\leqslant\alpha$ выполнено $\mathrm{Cap}_{\beta,p}(E)\le c\,\mathrm{Cap}_{\beta,q}(E)$.

3) Пусть $\mathrm{diam}X<\infty$, $0<\beta\leqslant\alpha$ и $1/q=1/p-(\alpha-\beta)/\gamma$. Тогда

$$\Big[\mathrm{Cap}_{\beta,q}(E)\Big]^p \le c\Big[\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(E)\Big]^q.$$

4) $\mu(E) \leqslant \mathrm{Cap}_{\alpha,p}(E)$ и $\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(B(x,r)) \le cr^{-\alpha p}\mu(B(x,r))$ при $r \leqslant 1$.
5) Пусть $\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(E) = 0$, тогда $\dim_{\mathrm{H}}(E) \leqslant \gamma - \alpha p$.
6) Если мера μ регулярна по Альфорсу, то $\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(E) \le cH^{\gamma-\alpha p}(E)$.

Источники и литература

1) *Bondarev S.A., Krotov V.G.* Fine properties of Functions from Hajłash–Sobolev classes M^p_α, $p > 0$ I. Lebesgue points. // J. of Contemp. Math. Anal. 2016. V. 51, № 6. P. 282-295.
2) *Bondarev S.A., Krotov V.G.* Fine properties of Functions from Hajłash–Sobolev classes M^p_α, $p > 0$ II. Luzin approximation. // J. of Contemp. Math. Anal. 2017 V. 52, № 1. P. 3-22.
3) *Kinnunen J., Martio O.* The Sobolev capacity on metric spaces // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 1996. Vol. 21 P. 367-382.