Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Инвариантные оценки двумерных осцилляторных интегралов

Научный руководитель – Икромов Исроил Акрамович

Сафаров Акбар Рахманович
Аспирант
Самаркандский государственный университет имени Алишера Навои, Самарканд, Узбекистан
E-mail: safarov-akbar@mail.ru

Осцилляторным интегралом с фазой $\mathbb{P}$ и амплитудой φ называется интеграл по $\mathbb{R}^n$ вида

$$J(\mathbb{P},\varphi)=\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\mathbb{P}(x,a)}\varphi(x)dx, \tag{1}$$

где $\mathbb{P}:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ полиномиальная функция с вещественными коэффицентами и $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ элемент из пространства амплитудных функций.

Обозначим через $W_1^n(\mathbb{R}^n)$ пространство Соболева, где норма определяется по формуле

$$\|\varphi\|_{W_1^n(\mathbb{R}^n)}=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_{|\alpha|\le n}|D^\alpha\varphi|\right)dx, \tag{2}$$

здесь $D^\alpha\varphi$ производная от φ в смысле распределения.

Пусть $\mathbb{P}$ многочлен, имеющий вид:

$$\mathbb{P}(x,a)=P_3(x,a_3)+P_2(x,a_2)+P_1(x,a_1),$$

где $P_3(x,a_3):=a_{30}x_1^3+3a_{31}x_1^2x_2+3a_{32}x_1x_2^2+a_{33}x_2^3$, $P_2(x,a_2):=a_{20}x_1^2+2a_{21}x_1x_2+a_{22}x_2^2$ и $P_1(x,a_1):=a_{10}x_1+a_{11}x_2$.

Основным результатом работы является следующая:

Теорема 1. *Пусть $\varphi\in W_1^2(\mathbb{R}^2)$, тогда существует положительное число C такое, что для интеграла (1) с фазовой функцией $\mathbb{P}(x_1,x_2,a)$ справедлива следующая оценка:*

$$|J|\le\frac{C\|\varphi\|_{W_1^2(\mathbb{R}^2)}}{|D(P_3)|^{\frac{1}{6}}}, \tag{3}$$

где $D(P_3):=3a_{31}^2a_{32}^2+6a_{30}a_{31}a_{32}a_{33}-4a_{30}a_{32}^3-4a_{31}^3a_{33}-a_{30}^2a_{33}^2$–дискриминант полинома $P_3(x,a_3)$.

Из вышеуказанной теоремы 1 и теоремы 4 статьи [1] получим следующий результат:

Теорема 2. *Для интеграла (1) с фазовой функцией $\mathbb{P}(x,a)$ справедлива следующая оценка:*

$$|J|\le\frac{C\|\varphi\|_{W_1^2(\mathbb{R}^2)}}{|D(P_3)|^{\frac{1}{6}}+|H|^{\frac{1}{4}}+N^{\frac{1}{6}}}, \tag{4}$$

где $N:=a_{30}^2+3a_{31}^2+3a_{32}^2+a_{33}^2$, $H:=a_{31}^2+a_{32}^2-a_{30}a_{32}-a_{31}a_{33}$.

Следующее утверждение является аналогом теоремы Дж.Дёйстермата об ограниченности обобщенных функций Эйри, связанных с особенностями типа $D_4^\pm$ (см.[2]).

Теорема 3. *Существует постоянная C такая, что для произвольного компактного треугольника T справедлива следующая оценка*

$$\left|\int_T e^{i\mathbb{P}} dx_1 dx_2\right| \leq \frac{C}{|D(P_3)|^{\frac{1}{6}}}.$$

Источники и литература

1) Икромов И. А. Инвариантные оценки двумерных тригонометрических интегралов // Математический сборник. 1989.Т. 180,№ 8. С. 1017–1032.
Duistermaat J. J. Oscillatory integrals Lagrange immersions and unifoldings of singularities // Comm. Pure.Appl.Math. 1974.V. 27,№ 2. P. 207–281.