Секция «Физика»

Анализ проблемы существования термодинамического критерия прочности

Боброва Ирина Александровна
E-mail: ia.bobrova94@gmail.com

Критерии длительной прочности материалов основываются на предположении существования некоторого предельного (критического) состояния A_*, по достижении которого материал разрушается

$$A \leq A_*.$$

Причем предельное состояние A_* является критерием прочности только в том случае, если оно не зависит от характеристик материала.

Термодинамические критерии длительной прочности предполагают существование предельного термодинамического состояния, которое достижимо и единственно [3, 4]. К таким критериям относится энтропийный критерий прочности. Сущность его заключается в том, что в процессе нагружения материала предельному термодинамическому состоянию соответствует некоторое критическое значение приращения плотности энтропии ΔS_*, которое обуславливается диссипацией энергии $W(t)$ за время до разрушения материала t_* при температурном режиме $T(t)$ [3]

$$\Delta S_* = \int_0^{t_*} \frac{\dot{W}(t)}{T(t)} dt. \tag{1}$$

Для большинства материалов временная зависимость прочности имеет вид степенного закона, или формулы Голланда – Тернера [3]

$$t_* = B\,\sigma^{-\beta}, \qquad 3 \leq \beta \leq 12, \tag{2}$$

где B – коэффициент, зависящий от температуры, β – коэффициент длительной прочности, зависящий от жесткости материала.

В работе [1] рассмотрена проблема существования энтропийного критерия прочности (1) на основе структурно-механических моделей. В частности, показано, что критическое значение приращения плотности энтропии для среды с делящимся тензором деформации в условии ползучести за время (2) инвариантно лишь при $\beta = 2$, что не имеет физической основы

$$\Delta S_* = \frac{B}{\eta T}\,\sigma_0^{2-\beta}.$$

В данной работе проведен анализ критерия (1) на примере вязкоупругого материала, математическая модель которого построена с помощью аппарата дробного интегро-дифференцирования [5].

Рассмотрим «обобщенную» сплошную среду, для которой физические соотношения, связывающие деформацию и напряжение, имеют вид [2]:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{C}\,\left(I^{\alpha}\sigma\right)(t), \qquad \sigma(t) = C\,\left(D^{\alpha}\varepsilon\right)(t), \qquad 0 \leq \alpha \leq 1, \tag{3}$$

где I^{α}, D^{α} – операторы интегрирования и дифференцирования дробного порядка соответственно, C и α – константы, зависящие от свойств материала и определяемые в процессе эксперимента.

Учитывая модель вязкоупругого материала, построенную с помощью соотношений (3), получим закон ползучести образца вязкоупругого материала под действием напряжения $\sigma_0 = const$, мгновенно приложенного в начальный момент времени $t = 0$:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{C}\,\left(I^{\alpha}\sigma\right)(t) = \frac{1}{C}\,\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{\sigma_0\,d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} = \frac{\sigma_0}{C\,\Gamma(1+\alpha)}\,t^{\alpha}. \tag{4}$$

Тогда функция рассеяния энергии и предельное значение приращения плотности энтропии при условии (2) и (4) в термостатном режиме соответственно равны

$$W(t) = \int_0^t \sigma\,d\varepsilon = \frac{1}{C}\,\frac{\sigma_0^2}{\Gamma(1+\alpha)}\,t^{\alpha},$$

$$\Delta S_* = \frac{1}{T\,C}\,\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} B^{\alpha}\,\sigma_0^{2-\alpha\,\beta}. \tag{5}$$

Соотношение (5) инвариантно лишь при условии $\beta = 2/\alpha$, то есть зависит от вида материала. Модель вязкоупругой среды (3) включает в себя упругое состояние при $\alpha = 0$ и вязкое состояние при $\alpha = 1$, однако при таких значениях коэффициент длительной прочности $\beta \to \infty$ и $\beta = 2$ соответственно, что противоречит указанному диапазону (2) и не имеет физического обоснования.

Рассмотрим случай гармонической нагрузки с частотой ω и амплитудой σ_0 в термостатном режиме

$$\sigma(t) = \sigma_0 \sin \omega t. \tag{6}$$

С учетом (3) и (6) функция рассеяния энергии за время $t \geq 2\pi/\omega$ имеет вид

$$W(t) = \frac{\sigma_0^2}{2\,C}\,\frac{1}{\omega^{\alpha}\,\Gamma(\alpha)}\,\left[t\,\omega \sin\frac{\alpha\,\pi}{2} - \cos\left(2\omega t - \frac{\alpha\,\pi}{2}\right)\right]. \tag{7}$$

Работу диссипации за один цикл можно вычислить по (7), рассмотрев разность между двумя последующими циклами:

$$\Delta W(t) = \frac{\sigma_0^2}{2\,C}\,\frac{1}{\omega^{\alpha}\,\Gamma(\alpha)}\,\left[\pi\,\omega \sin\frac{\alpha\,\pi}{2} - \sin 2\pi\omega\,\sin\left(6\pi\omega - \frac{\alpha\,\pi}{2}\right)\right]. \tag{8}$$

Из определения (1) и соотношения (8) следует, что работа диссипации и приращение предельного значения плотности энтропии зависят от свойств материала.

Таким образом, процесс нагружения материала сопровождается возрастанием плотности энтропии, которая к моменту разрушения материала имеет определенное предельное значение. Однако скорость роста плотности энтропии и ее предельное значение можно трактовать лишь как степень отклонения процесса от равновесного, а не как полноценный критерий прочности материалов.

Считаю своим приятным долгом выразить благодарность Бугримову А. Л. за постоянное внимание к работе и ряд ценных комментариев.

Источники и литература

1) Бугримов А. Л. О существовании энтропийного критерия прочности неупругих материалов // Вестник МГОУ. Серия «Физика и математика». 2007, №2. С. 29–35.
2) Бугримов А. Л. Об одном подходе к построению физических соотношений обобщенного вида в механике деформируемого тела // Каучук и резина. 1994, №4. С. 28–32.
3) Гольденблат И. И., Бажанов В. Л., Копнов В. А. Длительная прочность в машиностроении. М., 1977.
4) Победря Б. Е. Термодинамический критерий прочности композитов // Механика композитных материалов. 1993, Т. 29, №3. С. 302–310.
5) Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987.