Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

Функциональные предельные теоремы для обобщенных процессов восстановления

Соколова Анна Ильинична
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: ale4kasokolova@gmail.com

Рассмотрим различные обобщения процессов восстановления:

- Пусть $S_n = X_0 + \ldots + X_n,\ 0 \leqslant n \leqslant k-1$, в то время как при $n \geqslant k$ положим $S_n = S_{k-1} + T_1 + \ldots + T_{n-k+1}$, где все слагаемые - независимые неотрицательные случайные величины, $G_i(x)$ - функция распределения (ф.р.) величин $X_i,\ i = 0, \ldots, k-1$. Пусть далее $T_j,\ j \geqslant 1$ - одинаково распределенные величины с ф.р. $F(x)$. Назовем величины $X_i,\ i \geqslant 1,\ T_j,\ j \geqslant 1$ промежутками между восстановлениями, а S_n - моментами восстановления. Тогда при $k > 1$ процесс $\{S_n\}_0^\infty$ является *запаздывающим процессом восстановления.*
- Пусть $S_0 = 0,\ \ S_n = T_1 + \ldots + T_n$, где все слагаемые - независимые неотрицательные случайные величины, $F_i(x)$ - ф.р. величин $T_{kl+i},\ i = 1, \ldots, l$ для некоторого $l > 1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Величины T_j - промежутки между восстановлениями, S_n - моменты восстановления, а сам процесс $\{S_n\}_0^\infty$ - *периодический процесс восстановления* с периодом l.
- Пусть $S_n = X_0 + \ldots + X_n,\ 0 \leqslant n \leqslant k-1$, в то время как при $n \geqslant k$ имеем $S_n = S_{k-1} + T_1 + \ldots + T_{n-k+1}$, где все слагаемые - независимые неотрицательные случайные величины, $G_i(x)$ - ф. р. величин X_i, F_j - ф.р. величин $T_{ql+j}, j = 1, \ldots, l$ для некоторого $l > 1$, $q = 0, 1, 2, \ldots$. Назовем величины X_i, T_j промежутками между восстановлениями, а S_n - моментами восстановления. Процесс $\{S_n\}_0^\infty$ - *периодический процесс восстановления с запаздыванием.*

Целью представленной работы является изучение асимптотического поведения описанных процессов.

С помощью теоремы Донскера о функциональной сходимости, а также свойств слабо сходящихся последовательностей получены аналоги функциональных предельных теорем для описанных процессов.

Основные этапы решения:

- Введение вспомогательных случайных элементов в пространстве $D[0,1]$ путем центрирования и нормирования частичных сумм процессов.
- Доказательство слабой сходимости вспомогательных случайных элементов к винеровскому процессу.
- Переход процессу, построенному по считающему процессу $N_t = \min\{k \geqslant 0 : S_k > t\}$ с помощью теорем о случайной замене времени.

Теорема: *Определим последовательность случайных функций*

$$Z_n(t,\omega) = \frac{N_{nt}(\omega) - nt\mu^{-1}}{\sigma\mu^{-3/2}\sqrt{n}},$$

где $N_t = \min\{k \geqslant 0 : S_k > t\}$ *- количество восстановлений на отрезке* $[0,t]$ *для запаздывающего процесса восстановления. Для случайных функций* Z_n *выполняется соотношение*

$$Z_n \xrightarrow{D} W,$$

где $\xrightarrow{D}$ *означает слабую сходимость в пространстве* $D[0,1]$, *а* W *— винеровский процесс.*

Источники и литература

1) Афанасьева Л.Г., Булинская Е.В. Случайные процессы в теории массового обслуживания и управления запасами, М.: Изд-во МГУ, 1980.

2) Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.

3) Боровков А.А. Теория вероятностей, М.: Эдиториал УРСС, 1999.

4) Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2. - М.: Мир, 1984.

Слова благодарности

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю профессору Булинской Екатерине Вадимовне за постановку задачи и внимание к работе.