Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

Дисконтированные дивиденды в модели со ступенчатой функцией барьера

Муромская Анастасия Андреевна
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия
E-mail: mur-nastia@yandex.ru

Рассмотрим классическую модель риска Крамера-Лундберга. В рамках данной модели в случае отсутствия дивидендов капитал страховой компании в момент t выглядит следующим образом:

$$U(t) = x + ct - S(t),\ t \geq 0.$$

Здесь $\{S(t)\}$ - это составной пуассоновский процесс с интенсивностью λ, x - начальный капитал компании, c - интенсивность выплаты премий. Пусть далее $D(t)$ - это совокупные дивиденды, выплаченные к моменту времени t. Тогда $X(t) = U(t) - D(t)$ - это капитал в момент времени t и $T = \inf\{t:\ X(t) < 0\}$ - момент разорения страховой компании.

На сегодняшний день изучено много различных дивидендных стратегий, одними из самых известных являются так называемые барьерные стратегии. Согласно барьерной стратегии с параметром b, дивиденды не выплачиваются, когда $X(t) < b$, в то время как дивиденды выплачиваются с интенсивностью c, если $X(t) = b$. Если $X(t) > b$, то сразу же в качестве дивидендов выплачивается сумма, равная $X(t) - b$. Барьерные стратегии рассматривались во многих работах, посвященных теории дивидендов, таких как, например, статья Гербера и др. [2] и книга Бюльмана [1].

Важным недостатком барьерных стратегий является то, что они не подразумевают возможность изменения условий выплаты дивидендов с течением времени. В связи с этим рассмотрим новые дивидендные стратегии, согласно которым уровень барьера b может меняться сразу же после моментов поступлений требований T_i. Данные стратегии будут задаваться уже не одним значением барьера b, а набором $b_1, \ldots, b_n$. А именно, пусть $b = b_i$ на полуинтервалах $[T_{i-1}, T_i)$, где $1 \leq i \leq n-1$ (в предположении $T_0 = 0$), и $b = b_n$, когда $t \geq T_{n-1}$. Будем также считать, что получившаяся ступенчатая функция барьера является неубывающей: $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$.

Пусть также $V(x, b)$ и $V(x, b_1, \ldots, b_n)$ - это математические ожидания дисконтированных дивидендов, выплаченных до момента разорения страховой компании в моделях с барьерной и ступенчатой дивидендными стратегиями соответственно. В данной работе будет доказана справедливость следующей теоремы:

Теорема 1. *Для всех значений $0 \leq x \leq b_1$ имеет место равенство:*

$$V(x, b_1, \ldots, b_n) = V(x, b_n) + \sum_{i=1}^{n-1} \left[1 - V'(b_i, b_n)\right] V_{[T_{i-1}, T_i)}(x, b_1, \ldots, b_i),$$

где $V_{[T_{i-1}, T_i)}(x, b_1, \ldots, b_i)$ - это математическое ожидание дисконтированных дивидендов, выплаченных на полуинтервале $[T_{i-1}, T_i)$.

Также будут получены верхние и нижние оценки для функции дисконтированных дивидендов $V(x, b_1, \ldots, b_n)$.

Источники и литература

1) Buhlmann H. Mathematical methods in risk theory. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York. 1970.
2) Gerber H. U., Shiu E. S. W. and Smith N. Maximizing dividends without bankruptcy // ASTIN Bulletin. 2006. 36(1). 5–23.