Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

О марковских процессах с синхронизацией

Шейпак Святослав Игоревич
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия
E-mail: sheypak.si@yandex.ru

В данной работе исследуется двумерный марковский процесс $X_t = (X_t^1, X_t^2)$, $t \in \mathbb{R}_+$, компоненты которого взаимодействуют по типу синхронизации. Динамика частиц без синхронизации описывается следующим образом:

$$Y_t^i = \nu_i t + \sigma_i W_t^i, \quad i = 1, 2, \quad \nu_i \in \mathbb{R}, \quad \sigma_i > 0 \tag{1}$$

где W_t^i — независимые стандартные винеровские процессы. В моменты $\tau_1^1, \tau_2^1, \tau_3^1 \dots$ и $\tau_1^2, \tau_2^2, \tau_3^2 \dots$, соответствующие скачкам независимых пуассоновских процессов с интенсивностями λ_1 и λ_2, происходят скачкообразные синхронизации $X_t^1 \to X_t^2$ и $X_t^2 \to X_t^1$. В промежутках времени, когда синхронизации не происходят, частицы движутся согласно (1). Подобные многомерные системы рассматривались в [1,2], где было доказано существование различных временных фаз в поведении моделей. В настоящей заметке изучается предельное распределение случайного процесса $d_t = X_t^2 - X_t^1$, равного разности компонент системы. Получен результат, что процесс d_t имеет стационарное распределение π с плотностью

$$p(x) = \alpha_2 s_2 e^{s_2 x} I(x < 0) + \alpha_1 s_1 e^{-s_1 x} I(x \geqslant 0) \tag{2}$$

где $s_i > 0, \alpha_i \in (0, 1)$ — некоторые вещественные константы и $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Показано, что процесс сходится к своему стационарному распределению с экспоненциальной скоростью в метрике расстояния по вариации. Показателем этой экспоненциальной сходимости служит суммарная интенсивность пуассоновских потоков синхронизаций. По аналогии с дискретными цепями Маркова [3] для выявления более тонких особенностей этой сходимости изучаются некоторые свойства генератора марковской полугруппы ассоциированной с d_t как оператора в $L_2(\pi)$.

Источники и литература

1) Малышев В. А., Манита А. Д. Фазовые переходы в модели синхронизации времени // Теория вероятностей и ее применения. — 2005. — Т. 50. — С. 150–158.
2) Manita A. Clock synchronization in symmetric stochastic networks // Queueing Systems. — 2014. — Vol. 76, no. 2. — P. 149–180.
3) Diaconis P., Strook D. “Geometric bounds for eigenvalues of Markov chains”, The Annals of Applied Probability, 1991, Vol.1, No.1, 36-61