Об улучшении оценки числа ребер в задаче Эрдеша-Хайнала однородности 4

Ахмеджанова Маргарита -
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия
E-mail: mechmathrita@gmail.com

В докладе рассматривается задача экстремальной комбинаторики, связанная с оценкой минимального количества ребер гиперграфа, принадлежащего классу 4-однородных гиперграфов, которые не допускают правильных двухцветных раскрасок, или, как еще говорят, не обладают свойством B.

Напомним основные понятия: гиперграфом называется пара $H = (V, E)$, где $V = V(H)$ – некоторое множество, называемое множеством вершин гиперграфа, а $E = E(H)$– произвольная совокупность подмножеств множества V, называемых ребрами гиперграфа. Гиперграф является n-однородным, если каждое его ребро содержит ровно n вершин. Раскраска множества вершин $V(H)$ гиперграфа H называется правильной, если все ребра из $E(H)$ неодноцветны. Хроматическим числом гиперграфа H называется минимальное число цветов, требуемое для правильной раскраски вершин. В 1961 году П. Эрдеш и А. Хайнал поставили задачу об отыскании величины $m(n)$, равной наименьшему количеству ребер в n-однородном гиперграфе с хроматическим числом больше двух. Известно, что $m(2) = 3$ и $m(3) = 7$.

Постановка задачи: n =4 , оценить снизу величину $m(n)$.

Из результатов Аббота–Мозера вытекает неравенство, которое Аббот–Хансен улучшают до $m(4) \leqslant 24$, а Тофт до $m(4) \leqslant 23$; последний факт есть текущий рекорд. В 1995 г. Г. Мэннинг ([4]) с помощью компьютерного перебора показал, что $m(4) \geqslant 20$. А в 2011 Остергард с помощью компьютерного перебора показал, что $m(4) > 22$. "Вопрос о том, насколько можно доверять такому результату, остается открытым. Подводя итоги, мы с твердой уверенностью можем лишь утверждать, что $17 \leqslant m(4) \leqslant 23$"(А. М. Райгородский, Д. А. Шабанов, Задача Эрдеша– Хайнала о раскрасках гиперграфов, ее обобщения и смежные проблемы, 2011, 121).

Оценка в 17 ребер была получена в 1993 г. М. Гольдбергом и Х. Расселом ([1])

Теорема 1. *Пусть $H = (V, E)$ произвольный гиперграф однородности 4. Тогда при*

$$E < 19$$

этот гиперграф можно правильно раскрасить в два цвета

Источники и литература

1) M.K Goldberg,H.C. Russell. Toward computing m(4), Ars Combin. 30 3-12,1990.
2) А. М. Райгородский, Д. А. Шабанов .Задача Эрдеша–Хайнала о раскрасках гиперграфов, ее обобщения и смежные проблемы, УМН, том 66, выпуск 5(401), 109–182, 2011
3) A . L . Abbott and L . Moser. On a Combinatorial Problem of Erdös and Hajnal,amid. Mall, .Bull ., 7 ,1964.
4) Manning, G. M. Some results on the m(4) problem of Erdős and Hajnal – Electronic Research Announcements of the American Mathematical Society