Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Некоторые свойства отображений, сохраняющих детерминанты прямоугольных матриц

Паламарчук Анастасия Игоревна

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: felixandrer@gmail.com

Теория определителей квадратных матриц является одним из активно развивающихся разделов современной линейной алгебры, который актуален как в связи с теоретическими вопросами, так и в связи с целым рядом приложений. Однако понятие определителя можно обобщить на случай прямоугольных матриц, например, следующим образом:

Пусть $I = \{1, 2, ..., n\}$, $K = \{1, ..., k\}$ - подмножество I. Обозначим за S_k^I множество инъекций из K в I, а за ζ_k^I - семейство подмножеств I мощности k.

Определение [1, теорема 13] *Пусть* $1 \leq k \leq n$, $X = (x_{ij}) \in M_{nk}(\mathbb{C})$.

$$det_{nk}(X) := \sum_{\sigma \in S_k^I} sgn_{nk}(\sigma) x_{\sigma(1)1} \cdot ... \cdot x_{\sigma(k)k}$$

$$Det_{nk}(X) := \sum_{\sigma \in S_k^I} (-1)^{\nu(\sigma)} x_{\sigma(1)1} \cdot ... \cdot x_{\sigma(k)k}$$

В случае $n = k$, *оба детерминанта совпадают с обычным определителем для квадратных матриц.*

Известна классическая теорема Фробениуса 1897г. о характеризации линейных отображений, сохраняющих определитель. Изучению этой тематики было посвящено очень много работ. В статье [2] были ослаблены некоторые условия, например, условие линейности отображения.

Мы рассмотрим линейные отображения пространства $M_{nk}(\mathbb{C})$, сохраняющие детерминанты прямоугольных матриц. Аналог теоремы Фробениуса для таких отображений пока неизвестен. Нами были изучены некоторые свойства детерминантов и отображений, сохраняющих детерминанты, и были получены следующие результаты:

Лемма *Пусть* $2 \leq k \leq n$, $n - k \equiv 0 \pmod 2$. $\forall\ A \neq 0 \in M_{nk}(\mathbb{C})\ \exists\ B \in M_{nk}(\mathbb{C})$ *:*
а) $det_{nk}(B) = 0$ *и* $det_{nk}(A + B) \neq 0$
б) $Det_{nk}(B) = 0$ *и* $Det_{nk}(A + B) \neq 0$

Теорема *Рассмотрим линейное отображение* ϕ: $M_{nk}(\mathbb{C}) \to M_{nk}(\mathbb{C})$, $2 \leq k \leq n$ *и* $n - k \equiv 0 \pmod 2$. *Пусть* ϕ *обладает одним из следующих свойств :*
(1) $det_{nk}(\phi(A)) = det_{nk}(A)\ \forall A \in M_{nk}(\mathbb{C})$
(2) $Det_{nk}(\phi(A)) = Det_{nk}(A)\ \forall A \in M_{nk}(\mathbb{C})$.
Тогда отображение ϕ *биективно.*

Источники и литература

1) Yoshiomi Nakagami, Haruo Yanai, On Cullis' determinant for rectangular matrices, Linear Algebra and its Applications 422 (2007) 422–441
2) Victor Tan, Fei Wang, On determinant preserver problems, Linear Algebra and its Applications 369 (2003) 311–317

Слова благодарности

Автор благодарен своему научному руководителю профессору
А. Э. Гутерману за постановку задачи и постоянное внимание к работе.