Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Порядки на полугруппах и псевдообратные.

Штейнер Павел Михайлович
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Москва, Россия
E-mail: pashteiner@ya.ru

Доклад основан на результатах совместной работы с А.Э. Гутерманом и К. Мари.

Определение 1. Бинарное отношение $\mathcal{R}$ на множестве X называется отношением порядка, если имеет место:

1) Рефлексивность: $\forall x : x\mathcal{R}x$
2) Антисимметричность: $\forall x, y : x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$
3) Транзитивность: $\forall x, y, z : x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$

Отношения порядка на полугруппах являются одним из классических направлений современной алгебры. Основы этой теории и определения можно найти в [1] и [3]. В [2] предложен новый способ задания таких отношений, позволяющий получить некоторые классические порядки, как частные случаи.

Определение 2. Пусть $D : S \to \mathcal{P}(S)$(S — полугруппа, a и $b \in S$, $\mathcal{P}(S)$ — множество подмножеств S). Определим следующие отношения:

1) $a\mathcal{S}^D b$ если $a = b$ или $\exists d \in D(b)$ такое, что $\exists b^{-d}$ и $a = bb^{-d}b$
2) $a\mathcal{W}^D b$ если $a = b$ или $\exists d \in D(b)$ такое, что $\exists b^{-d}$ и $a = ab^{-d}b = bb^{-d}a = ab^{-d}a$.
3) Для нерегулярных полугрупп: $a\mathcal{W}^D_{sym} b$ если $a = b$ или $\exists d \in D(b)$ такое, что $\exists b^{-d}$ и $a = ab^{-d}b = bb^{-d}a$. Если b регулярна, то $ab^{-d}a = a$.

Были получены следующие результаты:

Теорема 1. *Пусть S - полугруппа, D - функция $S \to \mathcal{P}(S)$*

1) *Отношения $\mathcal{W}^D$ и $\mathcal{W}^D_{sym}$ являются отношениями порядка.*
2) *Отношение $a\mathcal{S}^D b$ сильнее отношения $a\mathcal{W}^D b$.*
3) *Для любых $a, b \in S$ и для любой функции D выполнено: $a\mathcal{W}^D b \Rightarrow a \leq^- b$*

Также показано, что отношение $\mathcal{S}^D$ является рефлексивным и антисимметричным. Построены примеры, показывающие, что оно вообще говоря не является транзитивным и исследован класс полугрупп, над которыми это отношение является отношением порядка.

Источники и литература

1) A. Ben Israel and T.N.E. Greville, Generalized Inverses, Theory and Applications, 2nd ed., Springer, New York, 2003.
2) A. Guterman, X. Mary and P. Shteyner, Partial orders based on inverses along elements, preprint
3) X. Mary, On generalized inverses and Green's relations, Linear Algebra Appl. 434 (2011), no. 8, pp. 1836-1844.

Слова благодарности

Автор благодарен своему научному руководителю профессору А. Э. Гутерману за постановку задачи и постоянное внимание к работе. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ 15-01-01132.