Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

О поведении решений с бесконечной производной уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка с отрицательным потенциалом

Дулина Ксения Михайловна[1], Корчемкина Татьяна Александровна[2]
1 - Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальных уравнений, Москва, Россия; 2 - Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальных уравнений, Москва, Россия
E-mail: sun-ksi@mail.ru

Рассматривается уравнение типа Эмдена–Фаулера второго порядка с отрицательным потенциалом

$$y'' = p(x,\, y,\, y')\, |y|^k \operatorname{sgn} y, \quad k > 1, \tag{1}$$

где функция $p(x,\, u,\, v)$ положительна, непрерывна по совокупности переменных и липшицева по последним двум аргументам. В работе [1] приведена асимптотическая классификация всех максимально продолженных решений уравнения (1). В случае $p \equiv p(x)$ классификация получена И.Т. Кигурадзе и Т.А. Чантурией [2]. Для уравнений третьего и четвертого порядков классификация всех максимально продолженных решений приведена И.В. Асташовой в [3,4]. При получении классификации решений существенным является вопрос о поведении решений на границе области определения.

Определение. Пусть $y(x)$ — максимально продолженное решение уравнения (1), $a < \infty$ — граничная точка его области определения. Решение $y(x)$ называется *влипающим в* $x = a$, если

$$\lim_{x\to a} |y'(x)| = +\infty, \quad \lim_{x\to a} y(x) = C,\ |C| < \infty.$$

С использованием методов, изложенных в работах [3,5], получено достаточное условие на функцию $p(x,\, u,\, v)$, при котором все нетривиальные максимально продолженные решения уравнения (1) влипают в $x = a$, где $a < \infty$ — граничная точка области определения. Также получено достаточное условие на функцию $p(x,\, u,\, v)$, при котором все рассматриваемые решения имеют вертикальную асимптоту. В случае $p \equiv p(x)$ вопрос существования решений с вертикальной асимптотой исследован в работе [2].

Лемма 1. *Пусть существует константа* $m > 0$, *такая, что* $p(x,\, u,\, v) \ge m$. *Пусть* $y(x)$ *— нетривиальное максимально продолженное решение уравнения (1), удовлетворяющее в некоторой точке* x_0 *условию* $y(x_0)\, y'(x_0) > 0$ (*соответственно,* $y(x_0)\, y'(x_0) < 0$). *Тогда существует значение* x^*, $x_0 < x^* < +\infty$ (*соответственно,* $x_*, -\infty < x_* < x_0$), *для которого*

$$\lim_{x\to x^*} |y'(x)| = +\infty \quad \left(\textit{соответственно, } \lim_{x\to x_*} |y'(x)| = +\infty\right).$$

Если же $y(x_0)y'(x_0) = 0$, *то существуют значения* x_* *и* x^*, $-\infty < x_* < x_0 < x^* < +\infty$, *для которых*

$$\lim_{x \to x^*} |y'(x)| = \lim_{x \to x_*} |y'(x)| = +\infty.$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия леммы 1 и существует константа $C_1 > 0$, такая, что $p(x,\, u,\, v) \leq C_1 |v|^2$. Тогда прямые $x = x_*$, $x = x^*$, существование которых утверждается в лемме 1, являются вертикальными асимптотами.*

Теорема 2. *Пусть выполнены условия леммы 1, существуют константы $\varepsilon > 0$ и $C_2 > 0$, такие, что $p(x,\, u,\, v) \geq C_2 |v|^{2+\varepsilon}$. Тогда любое нетривиальное максимально продолженное решение $y(x)$ уравнения* (1) *является влипающим в прямые $x = x_*$, $x = x^*$, существование которых утверждается в лемме 1, причем*

$$x_0 - x_* \leq \frac{1}{C_2\,(1+\varepsilon)\,|y'(x_0)|^{1+\varepsilon}\,|y(x_0)|^k},$$

$$x^* - x_0 \leq \frac{1}{C_2\,(1+\varepsilon)\,|y'(x_0)|^{1+\varepsilon}\,|y(x_0)|^k}.$$

Источники и литература

1) Дулина К.М., Корчемкина Т.А. Асимптотическая классификация решений уравнения типа Эмдена–Фаулера второго порядка с отрицательным потенциалом // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия, №6 (128), 2015. С. 50–56.
2) Кигурадзе И.Т., Чантурия Т.А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1990. 432 с.
3) Асташова И.В. Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа. Под ред. И.В. Асташовой. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012. С. 22–288.
4) Astashova I.V. On asymptotic classification of solutions to nonlinear third- and fourth-order differntial equations with power non;inearity (Об асимптотической классификации решений нелинейных уравнений третьего и четвертого порядков со степенной нелинейностью) // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер.: Естественные науки. 2015. № 2. С. 3–25.
5) Astashova I. Application of dynamical systems to the study of asymptotic properties ofsolutions to nonlinear higher-order differential equations // Journal of Mathematical Sciences. — 2005. — Vol. 126, no. 5. — P. 1361–1391.