Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

**Устойчивые периодические решения уравнения Хатчинсона с непостоянным запаздыванием**

***Голубенец Вячеслав Олегович***
*Студент (магистр)*
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия
*E-mail: golubenets2010@yandex.ru*

Уравнение Хатчинсона играет важную роль в математической биологии. В работе рассматривается уравнение Хатчинсона с запаздыванием, зависящим от искомой функции:

$$\dot{N} = rN\left[1 - N(t - T(N(t)))\right]. \tag{1}$$

Здесь $r > 0$ – параметр. Предполагается ограниченность рассматриваемых решений $N(t)$ при $t \geqslant 0$ некоторой константой $M > 0$, положительность и ограниченность сверху константой $T_1 > 0$ во всей области определения аналитической функции $T(N)$. Также без ограничения общности предполагается, что $T(1) = 1$. В качестве фазового пространства уравнения (1) рассматривается класс функций $C_M(X) = \{\psi(t)|\psi(t) \in C(X), |\psi| \leqslant M\}$, где $X = [-T_1, 0]$.

Уравнение (1) имеет два состояния равновесия: $N_0 \equiv 0$ и $N_* \equiv 1$. Также решения $N(t)$ этого уравнения обладают важным свойством: если $N(0) > 0$, то $N(t) > 0$ при всех $t > 0$. В статье [1] подробно изучена локальная динамика этого уравнения. Показано, что при переходе параметра $r$ через критическое значение $\pi/2$ положительное состояние равновесия теряет устойчивость. Найдено необходимое и достаточное условие реализации суперкритической бифуркации Андронова – Хопфа в окрестности состояния равновесия $N_*$ и показано что в случае, если это условие не выполнено, происходит жесткая потеря устойчивости.

В настоящей работе исследуется случай жесткой потери устойчивости. В качетсве запаздывания выбрана функция: $T(N) = (1 + \mu)/(\mu + N)$, $0 < \mu \ll 1$. В силу выше отмеченного свойства о положительности решений уравнения (1) так выбранная функция $T(N)$ положительна и ограничена. Доказано, что при всех достаточно малых значениях параметра $\mu$ эта функция не удовлетворяет условию реализации суперкритической бифуркации Андронова – Хопфа в (1).

С помощью численного моделирования ваявлена возможность существования при $r > \pi/2$ у уравнения (1) (при так выбранной $T(N)$) устойчивого периодического нелокального решения релаксационного типа. Для аналитического изучения данной ситуации исходное уравнение посредством перенормировок времени и замен переменных сведено к виду

$$\dot{N} = \lambda\left[1 - \mu N\left(t - \frac{1 + \mu}{1 + N}\right)\right], \tag{2}$$

где $\lambda = r/\mu$ – большой параметр. Для исследования уравнения (2) применяется метод большого параметра (см., например, [2]).

**Источники и литература**

1) Голубенец В.О. Анализ локальных бифуркаций для уравнения с запаздыванием, зависящим от искомой функции // Моделирование и анализ информационных систем. 2015. Т. 22. №5. С. 711-722.
2) Кащенко С.А. Асимптотика решений обобщенного уравнения Хатчинсона // Моделирование и анализ информационных систем. 2012. Т. 19. №3. С. 32-61.