Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Метод характеристик для дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка.

Новик Юлия Фёдоровна
Студент (магистр)
Института подготовки научных кадров Национальной академии наук Беларуси, Кафедра информационных технологий, Минск, Беларусь
E-mail: novik.yu.f@gmail.com

Большая часть литературы о дифференциальных уравнениях в частных производных посвящена уравнениям именно второго порядка [1]. Однако, существует множество уравнений математической физики высших порядков, которые необходимо решать [2]. Поэтому рассмотрим дифференциальное уравнение четвертого порядка вида

$$a_{11}U_{xxxx}+2a_{12}U_{xxyy}+a_{22}U_{yyyy}+a^{(1)}U_{xxxy}+a^{(2)}U_{xyyy}+F=0,$$

где $F=F(x,y,U,U_x,U_y,U_{xx},U_{yy},U_{xy},U_{xxx},U_{xxy},U_{xyy},U_{yyy})$- линейная функция, $a^{(1)}=0$, $a^{(2)}=0, a_{11}\neq 0, a_{11}, a_{12}, a_{22}$ - функции x, y.

С помощью преобразования переменных $\xi=\varphi(x,y)$, $\eta=(x,y)$ получаем новое уравнение, эквивалентное исходному, вида $\bar{a}_{11}U_{\xi\xi\xi\xi}+\bar{a}_{12}U_{\xi\xi\eta\eta}+\bar{a}_{22}U_{\eta\eta\eta\eta}+\bar{F}=0$,

где $\bar{a}_{11}=a_{11}\xi_x^4+2a_{12}\xi_x^2\xi_y^2+a_{22}\xi_y^4,\ \bar{a}_{12}=6a_{11}\xi_x^2\eta_x^2+2a_{12}\left(\xi_x^2\eta_y^2+4\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y+\xi_y^2\eta_x^2\right)+6a_{22}\xi_y^2\eta_y^2$, $\bar{a}_{22}=a_{11}\eta_x^4+2a_{12}\eta_x^2\eta_y^2+a_{22}\eta_y^4$ и F - функция от ξ,η и всех частных производных до третьего порядка включительно. Переменные ξ и η будем выбирать так, чтобы коэффициент $\bar{a}_{11}$ равнялся нулю. Рассмотрим уравнение с частными производными первого порядка

$$a_{11}z_x^4+2a_{12}z_x^2z_y^2+a_{22}z_y^4=0. \tag{1}$$

Пусть $z=\varphi(x,y)$ какое-нибудь частное решение уравнения (1). Тогда имеют место быть следующие леммы.

Лемма 1. Если $z=\varphi(x,y)$ является частным решением уравнения (1), то соотношение $\varphi(x,y)=C$ представляет собой общий интеграл ОДУ

$$a_{11}dy^4-2a_{12}dx^2dy^2+a_{22}dy^4=0. \tag{2}$$

Лемма 2. Если $\varphi(x,y)=C$ представляет собой общий интеграл ОДУ (2), то функция $z=\varphi(x,y)$ удовлетворяет уравнению (1).

Уравнение (1) называется характеристическим для исходного уравнения, а его интегралы характеристиками. Таким образом, можно решать уравнения вида исходного методом характеристик.

Источники и литература

1) Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1999.

2) Полянин А.Д., Справочник. Линейные уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2001.