Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Групповой анализ одномерного уравнения Больцмана

Платонова Ксения Сергеевна

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: kseniya-plat@yandex.ru

Исследуется одномерное уравнение Больцмана (см. [1]):

$$f_t + cf_x + \mathcal{F} f_c = 0, \qquad (t, x, c \in \mathbb{R}). \tag{$*$}$$

Неизвестная функция $f = f(t, x, c)$ имеет смысл распределения частиц по скоростям. Функция $\mathcal{F} = \mathcal{F}(t, x, c)$, характеризующая внешнее силовое поле, предполагается заданной, но произвольной, так что речь идет на самом деле о семействе уравнений. Предполагается также наличие связи $dx = cdt$ между переменными.

В работе получены следующие результаты:

Теорема 1. Алгебра симметрий уравнения $(*)$ является суммой двух подалгебр: подалгебры замен независимых переменных

$$\Xi = -\beta_c \partial_t + (\beta - c\beta_c)\partial_x + (\beta_t + c\beta_x)\partial_c,$$

где $\beta = \beta(t, x, c)$ – произвольная функция, удовлетворяющая уравнению

$$(\mathcal{D}_\mathcal{F})^2 \beta - \mathcal{F}_x \mathcal{D}_\mathcal{F} \beta - \mathcal{F}_c \beta = 0,$$

через $\mathcal{D}_\mathcal{F}$ обозначен дифференциальный оператор $\mathcal{D}_\mathcal{F} = \partial_t + c\partial_x + \mathcal{F}(t, x, c)\partial_c$ и подалгебры замен неизвестной функции

$$\Xi = \eta(t, x, c, f)\partial_f,$$

где $\eta(t, x, c, f)$ – произвольная функция, удовлетворяющая условию

$$\eta_t + c\eta_x + \mathcal{F}\eta_c = 0.$$

Теорема 2. Алгебра эквивалентности семейства уравнений $(*)$ является суммой двух подалгебр: подалгебры замен независимых переменных

$$\Xi = -\beta_c \partial_t + (\beta - c\beta_c)\partial_x + (\beta_t + c\beta_x)\partial_c + (\mathcal{D}_\mathcal{F})^2 \beta \partial_\mathcal{F},$$

где $\beta = \beta(t, x, c)$ – произвольная функция, и подалгебры замен неизвестной функции

$$\Xi = \eta(f)\partial_f,$$

где $\eta(f)$ – произвольная функция.

Источники и литература

1) Mueller I., Ruggeri T. Extended thermodynamics // Springer Tracts in Natural Philosophy. 1998. V. 37