Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Точная оценка числа предельных циклов автономных систем на плоскости

Кузьмич Андрей Викторович

Аспирант

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Факультет математики и информатики, Кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений, Гродно, Беларусь

E-mail: andrei-ivn@mail.ru

Для автономной системы дифференциальных уравнений на плоскости

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y),\ \frac{dy}{dt} = Q(x,y),\ (x,y) \in \Omega \subset R^2,\ P(x,y), Q(x,y) \in C^1(\Omega, R) \tag{1}$$

рассматривается проблема точной оценки числа и локализации предельных циклов, окружающих одну точку покоя в односвязной области Ω фазовой плоскости R^2. Предлагаемый способ решения основан на применении подхода, предложенного Л.А. Черкасом [1].

Определение 1. Функция $\Psi \in C^1(\Omega, R)$ называется функцией Дюлака-Черкаса системы (1) в Ω, если существует число $0 \neq k \in R$ такое, что выполняется неравенство $\Phi(x,y) = k\Psi \operatorname{div} X + \frac{\partial\Psi}{\partial x}P + \frac{\partial\Psi}{\partial y}Q \geq 0 (\leq 0),\ \forall (x,y) \in \Omega \subset R^2,\ X = (P,Q)$.

Для локализации предельных циклов в области Ω используется трансверсальность множества $W = \{(x,y) \in \Omega : \Psi(x,y) = 0\}$ векторному полю X системы (1).

Теорема 1 (Признак Дюлака-Черкаса). Пусть в односвязной области Ω система (1) имеет единственную точку покоя O, являющуюся антиседлом, а Ψ представляет функцию Дюлака-Черкаса системы (1) при отрицательном k в области Ω, где W состоит из s вложенных друг в друга овалов ω_i, окружающих точку O. Тогда в каждой из $s-1$ кольцеобразных подобластей Ω_i, ограниченных соседними овалами ω_i и ω_{i+1}, система (1) имеет точно один предельный цикл, а в целом она может иметь в области Ω не более s предельных циклов.

Признак Дюлака-Черкаса позволяет эффективно находить верхнюю оценку числа предельных циклов для многих классов систем (1) [1]. Однако остается открытым вопрос существования предельного цикла в двусвязной подобласти $\Omega_s \subset \Omega$, граница которой состоит из границы области Ω и внешнего овала ω_s множества W. В докладе будут представлены подходы, позволяющие доказать существование предельного цикла в подобласти Ω_s. С этой целью признак Дюлака-Черкаса применяется дважды для построения в Ω_s замкнутой трансверсальной кривой. Суть двух из предлагаемых подходов изложена в следующих теоремах.

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1 и дополнительно для системы (1) в области Ω существует функция Дюлака-Черкаса $\Psi_1(x,y)$ при отрицательном k_1 такая, что множество $W_1 = \{(x,y) \in \Omega : \Psi_1(x,y) = 0\}$ состоит из $s+1$ овала в Ω, окружающих точку O. Тогда система (1) в области Ω имеет точно s предельных циклов.

Теорема 3. Пусть выполняются условия теоремы 1 и дополнительно для системы (1) в области Ω существует функция Дюлака $B = |\Psi(x,y)|^{\frac{1}{k}} |\Psi_1(x,y)|^{\frac{1}{k_1}},\quad k, k_1 \in R,\quad kk_1 \neq 0,\quad \Psi, \Psi_1 \in C^1(\Omega)$, такая, что функция $\Phi_1 \equiv kk_1\Psi\Psi_1 \operatorname{div} X + k\Psi\frac{d\Psi_1}{dt} + k_1\Psi_1\frac{d\Psi}{dt}$ является знакопостоянной и при этом множество W_1 состоит из единственного овала, расположенного в двусвязной подобласти Ω_s и окружающего все овалы множества W. Тогда система (1) имеет точно s предельных циклов в области Ω.

Разработанные подходы апробированы на примерах обобщенной системы Ван Дер Поля и возмущенной гамильтоновой системы.

Источники и литература

1) Черкас Л.А., Гринь А.А., Булгаков В.И. Конструктивные методы исследования предельных циклов автономных систем второго порядка (численно-алгебраический подход). Гродно, 2013.