Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

О поведении тел, перфорированных вдоль границы

Ёров Собир Тоирович
Студент (бакалавр)
Филиал Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова в городе Душанбе, Душанбе, Таджикистан
E-mail: sobir.yorov94@gmail.com

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — гладкая область в нижней полуплоскости с кусочно гладкой границей $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, часть Γ_2 — отрезок на оси абсцисс $[-1, 1]$. Часть Γ_1 вертикальна в окрестности концов отрезка $[-1, 1]$. Пусть B — круг $\{\xi : \xi_1^2 + (\xi_2 + \frac{1}{2})^2 \leq a^2\}$, $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$. Обозначим $B_\varepsilon^j = \{x \in \Omega : \varepsilon^{-1}(x_1 - x_1^j, x_2) \in B\}$, $j \in \mathbb{N}$, $B_\varepsilon = \bigcup\limits_j^{\mathcal{N}_\varepsilon} B_\varepsilon^j$, $\Gamma_\varepsilon = \partial B_\varepsilon$. Точки x_1^j расположены непериодически на оси. При этом в объединение B_ε входят только те шары, которые целиком попали в область Ω. Предполагается, что $\mathcal{N}_\varepsilon$ имеет порядок $\mathcal{O}(|\ln\varepsilon|^\alpha)$, $\alpha \in (0, 1)$, т.е. количество шаров при стремлении ε к нулю растёт достаточно . Определим область Ω_ε как $\Omega \setminus \overline{B_\varepsilon}$ (см. рис. 1). Пусть $H^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_1 \cup \Gamma_\varepsilon)$ — множество функций из соболевского пространства $H^1(\Omega_\varepsilon)$ с нулевым следом на $\Gamma_1 \cup \Gamma_\varepsilon$. Аналогично, через $H^1(\Omega, \Gamma_1)$ будем обозначать подмножество функций из $H^1(\Omega)$ с нулевым следом на Γ_1. В дальнейшем будем отождествлять функции из пространства $H^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_1 \cup \Gamma_\varepsilon)$ с функциями из $H^1(\Omega)$, равными нулю в B_ε, а функции из пространства $L_2(\Omega_\varepsilon)$ с функциями из $L_2(\Omega)$, равными нулю в B_ε. С другой стороны, для сужения функций из $L_2(\Omega)$ на Ω_ε будем сохранять их обозначения. Рассматриваются следующие краевые задачи:

$$\begin{cases} \Delta s^\varepsilon = -f & \text{в} \quad \Omega_\varepsilon, \\ s^\varepsilon = 0 & \text{на} \quad \Gamma_1 \cup \Gamma_\varepsilon, \\ s^\varepsilon x_2 = 0 & \text{на} \quad \Gamma_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta s^0 = -f & \text{в} \quad \Omega, \\ s^0 = 0 & \text{на} \quad \Gamma_1, \\ s^0 x_2 = 0 & \text{на} \quad \Gamma_2. \end{cases} \tag{1}$$

Теорема. *Пусть $s^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon; \Gamma_1 \cup \Gamma_\varepsilon)$ и $s^0 \in H^1(\Omega; \Gamma_1)$ — обобщенные решения задач, тогда*

$$s^\varepsilon \longrightarrow s^0 \qquad \textit{сильно в} \qquad H^1(\Omega) \qquad \textit{при} \qquad \varepsilon \to 0.$$

Иллюстрации

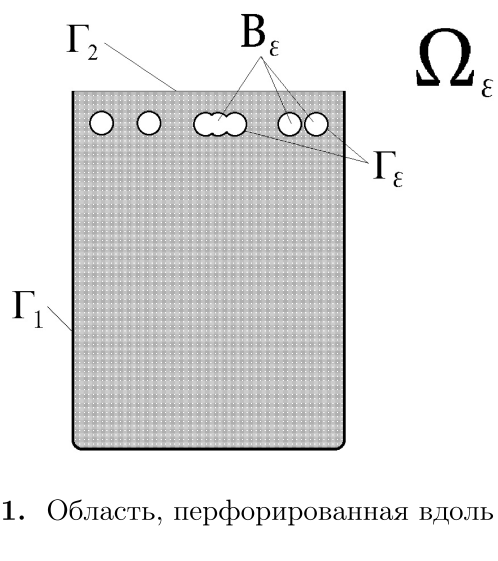

Рис. 1. Область, перфорированная вдоль границы