Секция «Дискретная математика и математическая кибернетика»

Нижняя оценка сложности схем для линейных функций в одном базисе из многовходовых элементов

Комбаров Юрий Анатольевич

Кандидат наук

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дискретной математики, Москва, Россия

E-mail: yuri.kombarov@gmail.com

В работе изучаются схемы из функциональных элементов [1], реализующие линейные булевы функции (однородную линейную функцию $l_n(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \oplus \ldots \oplus x_n$ и неоднородную линейную функцию $\overline{l_n}(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus 1$). Сложность реализации линейных функций схемами (определяемая как минимальное количество функциональных элементов, достаточное для реализации функции f схемой в заданном базисе B и обозначаемая как $L_B(f)$) известна для многих базисов, состоящих из элементов с не более, чем двумя входами. Например, в работе [2] доказано, что $L_{\{x\&y, x\vee y, \overline{x}\}}(l_n) = L_{\{x\&y, x\vee y, \overline{x}\}}(\overline{l_n}) = 4n-4$, а из результатов работ [3] и [4] следует, что $L_{\{x|y\}}(l_n) = 4n-4$ и $L_{\{x|y\}}(\overline{l_n}) = 4n-3$ (здесь $x|y$ обозначает функцию штрих Шеффера, определяемую как $x|y = \overline{x\&y}$). Сложность линейных функций известна также для базиса U_2, состоящего из всех элементов, реализующих нелинейные функции, существенно зависящие от двух переменных. В работе [5] доказано, что $L_{U_2}(l_n) = L_{U_2}(\overline{l_n}) = 3n-3$.

Для некоторых базисов известна структура минимальных схем. Так, в работе [6] показано, что все минимальные схемы, реализующие l_n или $\overline{l_n}$ в базисе $\{x\&y, x\vee y, \overline{x}\}$, состоят из $n-1$ четырехэлементого блока, каждый из которых реализует линейную функцию от двух переменных. В работе [4] аналогичный факт доказан для схем, реализующих однородные линейные функции в базисе $\{x|y\}$.

Сложность реализации линейных функций известна и для некоторых базисов, содержащих многовходовые элементы. Один из первых результатов в этом направлении получен в работе [7]. В этой работе рассматриваются минимальные схемы, реализующие линейные функции в базисе NOR, состоящем из всех элементов, реализующих функции вида $\overline{x_1 \vee \ldots \vee x_k}$ $(k \in \{2, 3, \ldots\})$. Доказано, что $L_{NOR}(l_2) = 5$, $L_{NOR}(\overline{l_2}) = 4$, а при $n \geq 3$ верно, что $L_{NOR}(l_n) = L_{NOR}(\overline{l_n}) = 3n-2$. По соображениям двойственности этот результат переносится на базис $NAND$, состоящий из всех элементов, реализующих функции вида $\overline{x_1\& \ldots \& x_k}$ $(k \in \{2, 3, \ldots\})$: при $n \geq 3$ верно, что $L_{NAND}(l_n) = L_{NAND}(\overline{l_n}) = 3n-2$.

В работе [8] исследуются схемы, реализующие линейные функции в различных базисах из многовходовых элементов. Для базиса T, состоящего из всех элементов, реализующих пороговые булевы функции, доказано, что $L_T(l_n) = L_T(\overline{l_n}) = \lceil \log(n+1) \rceil$. Также в работе [8] рассматриваются схемы, реализующие линейные функции в базисе U_∞. Базис U_∞ состоит из всех элементов, реализующих функции вида $(x_1^{\sigma_1}\& \ldots \& x_k^{\sigma_k})^\beta$, где $k \in \{2, 3, \ldots\}$, а $\sigma_1, \ldots, \sigma_k, \beta \in \{0, 1\}$. Этот базис является естественным обобщением базиса U_2. В работе [8] доказано, что $2n-1 \leq L_{U_\infty}(l_n) \leq \lceil (5n-4)/2 \rceil$ и $2n-1 \leq L_{U_\infty}(\overline{l_n}) \leq \lceil (5n-4)/2 \rceil$. Ни верхняя, ни нижняя оценки работы [8] не являются оптимальными. В работе [9] построена последовательность схем, реализующих l_n со сложностью $\left\lfloor \frac{7n-4}{3} \right\rfloor$, тем самым улучшена верхняя оценка. Основной результат настоящей заметки, улучшающий нижнюю оценку, представлен в следующей теореме.

Теорема 1. *При $n \geq 2$ верно, что $L_{U_\infty}(l_n) \gtrsim \frac{21}{9}n$.*

Источники и литература

1) Лупанов О.Б., Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1984.

2) Редькин Н.П., Доказательство минимальности некоторых схем из функциональных элементов // Проблемы кибернетики. 1970. № 23. 83–101.

3) Редькин Н.П., О минимальной реализации линейной функции схемой из функциональных элементов // Кибернетика. 1971. № 6. 31–38.

4) Комбаров Ю.А. О минимальных схемах в базисе Шеффера для линейных булевых функций // Дискретный анализ и исследование операций. 2013. 20, № 4. 65–87.

5) Schnorr C.P., Zwei lineare untere Schranken fur die Komplexitat Boolescher Funktionen // Computing. 1974. 13. 155-171.

6) Комбаров Ю.А. О минимальных реализациях линейных булевых функций // Дискретный анализ и исследование операций. 2012. 19, №3. 39–57.

7) Lai H.Ch., Muroga S., Logic networks with a minimum number of NOR (NAND) gates for parity functions of n variables // IEEE Transactions on computers. 1987. vol. C-36, no. 2. 157–166.

8) Wegner I., The complexity of the parity function in unbounded fan-in, unbounded depth circuits // Theoretical Computer Science. 1991. 85. 155–170.

9) Kombarov Y. A., Upper estimate of realization complexity of linear functions in a basis consisting of multi-input elements // Moscow University Mathematics Bulletin. — 2015. — Vol. 70, no. 5. — P. 226–229.