Секция «Дискретная математика и математическая кибернетика»

О стабилизации автономной модели миграционных процессов

Васильев Денис Игоревич

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра математической теории интеллектуальных систем, Москва, Россия

E-mail: DenisTryhard@yandex.ru

В работе рассматривается модель, предсказывающую миграцию населения внутри страны в зависимости от уровня зарплат. В качестве сети городов рассматривается граф, вершинам которого приписано текущее число людей в нём, максимальное число людей, которое может в нем находиться и невозрастающая по количеству людей функция зарплаты. На каждом шаге выбирается пара городов, и, если это выгодно, один из работников переезжает из одного города в другой. Формализуем это следующим образом: Если $m \in N$, то обозначим $N_m = \{0, 1, \ldots, m\}$. Пусть $G = (V, E)$ — полный граф без петель с n вершинами, т.е. $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, $E = \{\{v_1, v_2\} : v_1, v_2 \in V, v_1 \neq v_2\}$. Пусть каждой вершине графа приписана тройка: (m_i, q_i, f_i), где $m_i \in N$, $q_i \in N_{m_i}$, $f_i : N_{m_i} \to N$, причем f_i невозрастающая функция, т.е. для любых $a, b \in N_{m_i}$ если $a \geqslant b$, то $f_i(a) \leqslant f_i(b))$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Обозначим $Q(G) := \{q = (q_1, q_2, \ldots, q_n) : q_i \in N_{m_i}, i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$, $\mathcal{G}^n$ — множество всех таким образом нагруженных полных графов без петель с n вершинами. Вершины графа будем интерпретировать как города, для каждого города $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ число m_i будет восприниматься как максимально возможное число людей в городе, q_i — текущее число людей в городе, f_i — функция зарплат в i-м городе, Вектор $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ будем называть *состоянием* графа G. Рассмотрим автомат без выходов $A^G = (E, Q(G), \varphi, q_0)$, где E — входной алфавит, $Q(G)$ — алфавит состояний, $\varphi : Q(G) \times E \to Q(G)$ — функция переходов, q_0 — начальное состояние. Автомат A^G задается канонической системой

$$\begin{cases} q(1) = q_0, \\ q(t+1) = \varphi(q(t), v(t)), \end{cases}$$

где для $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$, $v = \{v_1, v_2\}$,

$$\varphi(q, v) = \begin{cases} q', \text{ если } f_{v_2}(q_{v_2} + 1) > f_{v_1}(q_{v_1}), q_{v_2} 0, \\ q'', \text{ если } f_{v_1}(q_{v_1} + 1) > f_{v_2}(q_{v_2}), q_{v_1} 0, \\ q \text{ в остальных случаях}, \end{cases} \tag{1}$$

$$q' = (q_1, \ldots, q_{v_1 - 1}, q_{v_1} - 1, q_{v_1 + 1}, \ldots, q_{v_2 - 1}, q_{v_2} + 1, q_{v_2 + 1}, \ldots, q_n),$$
$$q'' = (q_1, \ldots, q_{v_1 - 1}, q_{v_1} + 1, q_{v_1 + 1}, \ldots, q_{v_2 - 1}, q_{v_2} - 1, q_{v_2 + 1}, \ldots, q_n).$$

В нашей интерпретации функция переходов устроена таким образом, что для пары городов v_1, v_2, если зарплата в городе v_2 после увеличения числа жителей на единицу больше, чем зарплата в городе v_1, то из города v_1 один человек переезжает в город v_2. Через E^* будем обозначать множество всех слов в алфавите E. Через E^∞ будем обозначать множество всех сверхслов в алфавите E. Расширим функцию φ на $Q(G) \times E^*$, а именно, если $\alpha \in E^*$, $v \in E$, то индуктивно определим

$$\varphi(q, \alpha v) = \varphi(\varphi(q, \alpha), v).$$

Пусть $\alpha \in E^\infty$, α_t - первые t символов сверхслова α. Определим

$$A^G(\alpha) = \begin{cases} \lim\limits_{t\to\infty} \varphi(q_0, \alpha_t), \text{ если таковой существует,} \\ * \text{ — в противном случае.} \end{cases}$$

Теорема 1. *Для любого графа G из $\mathcal{G}^n$, любого сверхслова α из E^∞ имеем $A^G(\alpha) \neq *$.*

Определим $E_1^\infty = \{\alpha \in P^\infty \colon \forall p \in P \; \forall n \in \mathbb{N} \; \exists m > n \colon \alpha(m) = p\}$ как множество сверхслов из E^∞, в которых каждый символ из E встречается бесконечное число раз. Пусть $\mathcal{G}_0^n$ — подмножество $\mathcal{G}^n$ такое, что

- для любого $i \in \{1, 2, ..., n\}$ функция f_i – строго убывающая,
- для любых $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, $i \neq j$, для любых $a \in N_{m_i}$, $b \in N_{m_j}$ выполняется $f_i(a) \neq f_j(b)$.

Теорема 2. *Если G_1, G_2 из $\mathcal{G}_0^n$ такие, что $A^{G_1} = (q_0^1, E, Q, \varphi)$, $A^{G_2} = (q_0^2, E, Q, \varphi)$, $|q_0^1| = |q_0^2|$, то для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in E_1^\infty$ имеет место равенство $A^{G_1}(\alpha_1) = A^{G_2}(\alpha_2)$.*

Слова благодарности

Автор выражает благодарность Гасанову Эльяру Эльдаровичу за ясные ориентиры в процессе работы.