Секция «Вычислительная математика, математическое моделирование и численные методы»

Решение задач оптимизации с использованием аппроксимации модифицированными кривыми Безье

Садова Дарья Дмитриевна

Студент (бакалавр)

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия

E-mail: daria_sadova@mail.ru

Существует класс задач оптимизации, когда целевая функция задается набором точек, где были экспериментально вычислены значения функции. При такой постановке задачи сначала строится математическая модель функции с использованием методов аппроксимации, а затем ищется минимум у построенной модели функции. Аппроксимация функции чаще всего осуществляется полиномами или сплайн-функциями. У такого подхода есть существенный недостаток – необходимость вычисления коэффициентов полиномов.

В данной работе рассмотрен новый подход к созданию математической модели. Предлагается аппроксимировать с помощью кривой Безье третьего порядка. Однако, согласно своим свойствам, кривая Безье не проходит через все точки испытаний. В работе рассмотрена методика минимизации отклонения кривой Безье от точек, в которых были проведены испытания. При исследовании использовалось математическое описание кубической кривой Безье:

$$B(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3 P_3,$$

где P_0, P_1, P_2 и P_3, - координаты четырех опорных точек, определяющих форму кривой [2].

Безье сплайн представляет собой последовательность отдельных кубических кривых Безье, соединенных в одну кривую. Для формирования поли-кривой Безье необходимо, чтобы конечная точка каждой кубической кривой являлась начальной точкой следующего сегмента [3]. Для обеспечения непрерывности кривой можно записать следующее соотношение:

$$B_i'(0) = B_{i-1}'(1),$$

$$P = \frac{P_{2,i-1} + P_{1,i}}{2}$$

P - точка соединения двух кубических кривых Безье. Точка должна быть расположена на середине отрезка, соединяющего третью точку i-ого сегмента и вторую точку i+1-ого.

Установим зависимость отклонения кривой от аппроксимируемых точек от координат её опорных точек. Методом наискорейшего спуска были определены значения координат опорных точек, при которых отклонение будет минимальным [1]. Целевая функция отклонения кривой от точек имеет вид:

$$C(\bar{x}) \to \min,$$

$$C = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - y_{bi})^2,$$

где n – количество исходных точек, y_i - ордината i-ой исходной точки, y_{bi} - ордината соответствующей точки на кривой Безье.

Рассмотренный метод аппроксимации показал хорошие результаты при сравнении с полиномами и сплайнами. Простота построения, малое количество вычислений и затраченного времени делают эту методику выигрышной для решения любой задачи, требующей аппроксимацию функций.

Источники и литература

1) Грушин М.А. Аппроксимация профилей лопаток компрессора с помощью кривых Безье // Наука и образование. 2010. No. 7.
2) Роджерс Д., Адамс Дж. Математические основы машинной графики. М.: Мир, 2001.
3) Шикин Е.В., Боресков А.В. Компьютерная графика. Диалог-МИФИ. 2001.