Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Измеримая зависимость условных мер от параметра

Малофеев Илья Игоревич

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра теории функций и функционального анализа, Москва, Россия

E-mail: ilmalofeev@yandex.ru

Хорошо известно, что для всякой вероятностной меры μ на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}(X)$ суслинского пространства X и всякого борелевского отображения f из X в суслинское пространство Y на множествах уровня $f^{-1}(y)$ можно задать вероятностные меры μ^y, называемые условными мерами, порожденными f, которые вместе с образом меры μ относительно отображения f, обозначаемым символом $\mu\circ f^{-1}$ и определяемым равенством

$$\mu\circ f^{-1}(B)=\mu(f^{-1}(B)),\ B\in\mathcal{B}(Y),$$

будут обладать следующими свойствами:

1) мера μ^y сосредоточена на $f^{-1}(y)$ для всех $y\in f(X)$, т.е. $\mu^y(f^{-1}(y))=1,\ y\in f(X)$,
2) функции $y\mapsto\mu^y(B)$ для всех $B\in\mathcal{B}(X)$ измеримы относительно σ-алгебры, порожденной суслинскими множествами в X,
3) для всех борелевских множеств $B\subset X$ и $E\subset\mathcal{B}(Y)$ верно равенство

$$\mu(B\cap f^{-1}(E))=\int_E\mu^y(B)\,\mu\circ f^{-1}(dy).$$

Это означает, что для ограниченных борелевских функций φ на X имеем

$$\int_{f^{-1}(E)}\varphi\,d\mu=\int_E\int_X\varphi(x)\,\mu^y(dx)\,\mu\circ f^{-1}(dy)=\int_{f^{-1}(E)}\int_X\varphi(x)\,\mu^{f(u)}(dx)\,\mu(du).$$

Известно также, что условные меры определены однозначно с точностью до переопределения для точек y из множества меры нуль относительно индуцированной меры $\mu\circ f^{-1}$. Предположим теперь, что мера μ и отображение f измеримо зависят от параметра α из еще одного суслинского пространства Z. Можно ли выбрать условные меры также измеримо зависящими от этого параметра? Ответ оказывается положительным.

Теорема 1. *Пусть дано борелевское отображение $(x,z)\mapsto f_z(x),\ X\times Z\to Y$. Пусть для каждого $z\in Z$ задана борелевская вероятностная мера μ_z на X, причем отображение $z\mapsto\mu_z$ из Z в пространство вероятностных мер на X является борелевским при наделении пространства мер слабой топологией (порожденной двойственностью с пространством $C_b(X)$ ограниченных непрерывных функций), т.е. борелевы функции*

$$z\mapsto\int_X\varphi(x)\,\mu_z(dx),\quad \varphi\in C_b(X).$$

Пространства X,Y,Z предполагаются также вполне регулярными.
При указанных условиях условные меры μ_z^y для пар (μ_z,f_z) можно выбрать так, что при всех борелевских множествах B в X функция $(y,z)\mapsto\mu_z^y(B)$ на $Y\times Z$ будет измерима относительно σ-алгебры, порожденной суслинскими множествами.

Слова благодарности

Автор выражает благодарность В. И. Богачёву за постановку задачи и научное руководство.