Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Операторы слабого типа и тензорные произведения

Фуфаев Денис Владимирович

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра математического анализа, Москва, Россия

E-mail: fufaevdv@rambler.ru

Пусть (X,μ) — пространство с мерой, а оператор T действует из $L^0(X,\mu)$ в $L^0(X,\mu)$. Назовем T выпуклым, если из существования Tf_1 и Tf_2 следует существование $T(f_1+f_2)$ и при этом $|T(f_1+f_2)(x)| \le |Tf_1(x)| + |Tf_2(x)|$. Будем говорить, что выпуклый оператор T имеет слабый тип $(1,1)$ с константой C, если для любого $\lambda > 0$ и для любой функции $f \in L^1(X,\mu)$ выполняется следующее неравенство:

$$\mu\{x \in X : |Tf(x)| > \lambda\} \le \frac{C}{\lambda}||f||_{L^1(X,\mu)}.$$

Порой в гармоническом анализе возникают приближения не последовательностью операторов, а семейством операторов, которые образуют лишь частично упорядоченное множество. Самый распространенный пример — кратные ряды Фурье. Чтобы работать с такими семействами, вспомним понятие направленности (см. [1, стр.12]).

Определение. *Непустое множество A называется направленным, если на нем задан частичный порядок, удовлетворяющий следующему условию: для любых $m,n \in A$ найдется элемент $k \in A$ такой, что $m \le k$ и $n \le k$. Направленностью в множестве X называется набор элементов $\{x_n\}_{n\in A}$, индексируемых элементами направленного множества. Направленность $\{x_n\}_{n\in A}$ в топологическом пространстве X сходится к элементу x, если для любого непустого открытого множества U, содержащего x, найдется такой элемент $n_0 \in A$, что $x_n \in U$ для всех $n \ge n_0, n \in A$. Понятным образом определяется сходимость числовых направленностей, а также поточечная сходимость и сходимость почти всюду направленностей числовых функций.*

Пусть $\{T_n\}_{n\in A}$ — направленность линейных операторов, переводящих $L^0(X,\mu)$ в себя. Максимальным оператором относительного данного семейства операторов называется оператор $T : f(x) \mapsto \sup\limits_{n\in A} |T_n f(x)|$. Будем рассматривать лишь счетные направленности, т.е. такие, что множество A счетно — это гарантирует измеримость функции $Tf(x)$. Оператор T оказывается выпуклым.

Аналогично [2, теорема 5.1.3] доказывается следующий результат.

Теорема 2. *Пусть направленность линейных операторов $\{T_n\}_{n\in A}$ такова, что соответствующий максимальный оператор T имеет слабый тип (1,1), и пусть для любой функции ϕ из всюду плотного в $L^1(X,\mu)$ множества $\lim\limits_{n\in A} T_n\phi(x) = \phi(x)$ почти всюду на X. Тогда для любой функции $f \in L^1(X,\mu)$ выполняется $\lim\limits_{n\in A} T_n f(x) = f(x)$ почти всюду на X.*

Нас будут интересовать направленности лишь интегральных операторов, то есть операторов вида $Tf(x) = \int\limits_X K(x,y)\cdot f(y)d\mu(y)$.

Если интегральные операторы T^i с ядрами $K_i(\cdot,\cdot)$ заданы на $L^1(X^i,\mu^i)$, $i = 1,2$, то определим их тензорное произведение как интегральный оператор $T^1 \hat{\otimes} T^2$, действующий в $L^1(X^1 \times X^2, \mu^1 \otimes \mu^2)$ с ядром $K_1(\cdot,\cdot)\cdot K_2(\cdot,\cdot)$.

Для двух направленностей операторов $\{T^1_{n^1}\}_{n^1\in A^1}$ и $\{T^2_{n^2}\}_{n^2\in A^2}$ их тензорным произведением назовем направленность $\{T^1_{n^1} \hat{\otimes} T^2_{n^2}\}_{\mathbf{n}\in A}$, где $\mathbf{n} = (n^1,n^2), A = A^1 \times A^2$, причем $(n^1,n^2) > (m^1,m^2)$ тогда и только тогда, когда $n^1 > m^1$ и $n^2 > m^2$.

$\mathrm{n}^2 \in A^2$. Тензорное произведение большего числа множителей определяется очевидным образом.

Теорема 3. *Пусть* (X^i, μ^i), $i = 1, \ldots, D$ *— измеримые пространства конечной меры,* $X = \prod_{i=1}^{D} X^i$, $\mu = \bigotimes_{i=1}^{D} \mu^i$, $\{T^i_{n^i}\}_{n^i \in A^i}$, $i = 1, \ldots, D$ *— направленности линейных интегральных операторов, действующих в соответстующих* $L^1(X^i, \mu^i)$, *таких, что каждый максимальный оператор* T^i *имеет слабый тип (1,1) и, кроме того, для любого* $i = 1, \ldots, D$ *и любой ограниченной функции* $\phi \in L^1(X^i, \mu^i)$ *выполнено* $\lim\limits_{n^i \in A^i} T^i_{n^i}\phi(x) = \phi(x)$ μ^i*−почти всюду.*

Тогда для любой $f \in L^1(X)$ *такой, что* $f \cdot \ln(|f| + 1) \in L^1(X)$, *выполнено* $\lim\limits_{\boldsymbol{n} \in A} T_{\boldsymbol{n}} f(x) = f(x)$ μ*−почти всюду, где* A *— произвольная поднаправленность тензорного произведения направленностей* $\{T^i_{n^i}\}_{n^i \in A^i}$.

Источники и литература

1) Богачев В.И. Основы теории меры, т.2. Москва-Ижевск: НИЦ Регулярная и Хаотическая динамика, 2006. 680~с.

2) Голубов Б.И.,Ефимов А.В.,Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. М.: Изд. ЛКИ, 2008. 352~с.