Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

О переходе от повторного предела в теореме Ремизова к однократному пределу

Антипов Владимир Владимирович

Студент (бакалавр)

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Информатика и системы управления, Москва, Россия

E-mail: totoshky2@yandex.ru

Представление решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера выражениями, содержащими кратные интегралы растущей кратности, занимает важное место в аппарате математической и теоретической физики начиная с пионерской работы Р.Ф.Фейнмана 1948 года (1). Математическая теория интеграла Фейнмана была создана позже (2), (3) и продолжает развиваться до сих пор. Частью этой теории являются фейнмановские (4),(5),(6) и квазифейнмановские (7) формулы.

Для решения задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{i}{a}\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,x) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(t,x) + V(x)\psi(t,x) \\ \psi(0,x) = \psi_0(x) \end{cases}$$

И.Д. Ремизов доказал формулы (1) и (2)

$$e^{iatH}f = \left(\lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}\left[\left(1 - \frac{ian\,\mathrm{sign}(t)}{k}\right)I + \frac{ian\,\mathrm{sign}(t)}{k}S(|t/n|)\right]^k\right)f, \tag{1}$$

$$e^{iatH}f = \left(\lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}\sum_{m=0}^{k}\sum_{q=0}^{k-m}\frac{(-1)^{k-m-q}k!(ian\,\mathrm{sign}(t))^{k-q}}{m!q!(k-m-q)!k^{k-q}}(S(|t/n|))^m\right)f. \tag{2}$$

Простой пример к теореме Ремизова был получен Д.В. Гришиным и А.В. Смирновым (8).

Неудобство этих формул в том, что они содержат повторный предел, что осложняет численные расчёты по этим формулам, так как формула предлагает как бы "досчитать до бесконечности дважды".

Представляет интерес (замечание 3.9 в (7)) вопрос о том, можно ли в этих формулах перейти от повторного интеграла к двойному. Если ответ на этот вопрос отрицателен в общем случае, то интересно, в каких случаях такой переход всё же возможен.

Кроме того, можно поставить родственный вопрос, принадлежащий О.Г. Смолянову: в каких случаях существует такая последовательность $k(n)$, что повторный предел

$$lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}...n...k... = \lim_{n\to\infty}...n...k(n)... \tag{3}$$

В докладе будет обсуждаться описанная выше постановка задачи и связанные с ней принадлежащие автору доклада результаты.

Источники и литература

1) R.P. Feynman. Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics. :Rev. Mod. Phys. 20, 367 – Published 1 April 1948

2) B. Simon. Functional Integration and Quantum Physics

3) О.Г. Смолянов, Е.Т. Шавгулидзе. Континуальные интегралы.М.: ЛЕНАНД, 2015.

4) Я.А. Бутко. Формулы Фейнмана для эволюционных полугрупп. : МГТУ им. Н.Э. Баумана
5) O.G. Smolyanov, Feynman formulae for evolutionary equations, in: Trends in Stochastic Analysis, in: London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 353, 2009.
6) O.G. Smolyanov, Schrödinger type semigroups via Feynman formulae and all that, in: Proceedings of the Quantum Bio-Informatics V, Tokyo University of Science, Japan, 7–12 March 2011, World Scientific, 2013.
7) I.D. Remizov. Quasi-Feynman formulas – a method of obtaining the evolution operator for the Schrödinger equation. Journal of Functional Analysis, Available online 14 December 2015
8) D.V. Grishin, A.V. Smirnov, Quasi-Feynman formulas for the one-dimensional Schrödinger equation with a bounded smooth potential via the Remizov theorem, in: Int. Conf. "Infinite-Dimensional Dynamics, Dissipative Systems, and Attractors", Nizhny Novgorod (Russia), July 13–17, 2015.