Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Задача о локализации положительного корня функции типа Миттаг-Леффлера

Шерстюков Дмитрий Владимирович

Аспирант

Московский педагогический государственный университет, Москва, Россия

E-mail: sherdv92@gmail.com

Рассматривается целая функция типа Миттаг-Леффлера

$$E(z,\,\mu)\;=\;\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\mu+n)},\qquad z\in\mathbb{C},\quad \mu\in(-1,\,0).$$

В недавнем обзоре [1, теорема 4. 1. 2] доказано, что функция $E(z,\,\mu)$ имеет единственный положительный корень $x_0(\mu)$. В докладе обсуждается вопрос о локализации этого корня. Установлены двусторонняя оценка

$$\frac{-2\mu\sqrt{1+\mu}}{\sqrt{(1-\mu)^2(1+\mu)+4\mu^2}+(1-\mu)\sqrt{1+\mu}}\;<\;x_0(\mu)\;<\;\frac{-2\mu\sqrt{1+\mu}}{\sqrt{1-3\mu}+\sqrt{1+\mu}},$$

действующая для всех $\mu\in(-1,\,0)$, и асимптотики

$$x_0(\mu)\;\sim\;-\mu,\qquad \mu\;\to\;-0,$$

$$x_0(\mu)\;\sim\;\sqrt{1+\mu},\qquad \mu\;\to\;-1\;+\;0.$$

С помощью дополнительной оценки сверху $x_0(\mu)\;<\;x^*(\mu)$, где $x^*(\mu)$ есть вещественный корень уравнения

$$\mu(\mu+1)(\mu+2)+(\mu+1)(\mu+2)x+(\mu+2)x^2+x^3=0,$$

выводятся уточненные асимптотические формулы

$$x_0(\mu)\;=\;-\mu-\mu^2+O\left(\mu^3\right),\qquad \mu\;\to\;-0,$$

$$x_0(\mu)\;=\;\sqrt{1+\mu}-(1+\mu)+O\left((1+\mu)^{3/2}\right),\qquad \mu\;\to\;-1\;+\;0.$$

Источники и литература

1) Попов А. Ю., Седлецкий А. М. Распределение корней функций Миттаг-Леффлера // Современная математика. Фундаментальные направления. 2011. Т. 40. С. 3–171.

Слова благодарности

Автор благодарен А. Ю. Попову за постановку задачи.