

Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»  
О задаче Канторовича для нелинейных образов меры Винера

*Букин Дмитрий Борисович*

*Аспирант*

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,  
Механико-математический факультет, Кафедра теории функций и функционального  
анализа, Москва, Россия

*E-mail: d.b.bukin@gmail.com*

Пусть  $(X, \mathcal{A})$  и  $(Y, \mathcal{B})$  — измеримые пространства с заданными на них вероятностными мерами  $\mu$  и  $\nu$  соответственно. Пусть  $c(x, y)$  — неотрицательная измеримая функция на  $X \times Y$ . Она называется функцией стоимости. Задача Канторовича состоит в минимизации функционала стоимости

$$K(\pi) = \int_{X \times Y} c(x, y) \pi(dx, dy)$$

по всем вероятностным мерам  $\pi$  на  $X \times Y$  с проекциями  $\mu$  и  $\nu$ . Рассмотрим задачу Канторовича на пространстве  $X = Y = C[0, 1]$  с борелевской  $\sigma$ -алгеброй  $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ , соответствующей его естественной равномерной норме, с функциями стоимости  $c(x, y) = |x - y|_H^2$  и  $c(x, y) = |x - y|_H$ , где

$$H = W_0^{2,1} = \{h: h \text{ абсолютно непрерывна на } [0, 1], h' \in L^2[0, 1], h(0) = 0\}$$

есть пространство Камерона–Мартина меры Винера  $P_W$  (см. (1)) с нормой  $|h|_H = \|h'\|_{L^2}$ . Задача Канторовича с такой функцией стоимости была впервые изучена Д. Фейелем и А. С. Устюнелем (2) и оказалась разрешима в случае, когда  $\mu$  — это мера Винера, а  $\nu$  абсолютно непрерывна относительно  $\mu$ . Рассмотрим аналогичную задачу, где вместо меры Винера возьмем более общее распределение диффузионного процесса. В этом случае, при соответствующих условиях на коэффициенты процесса, мера  $\mu$  есть образ меры Винера  $P_W$  на  $X$  при отображении

$$F: X \rightarrow X, F(x) = f \circ x,$$

где  $f \in C^1(\mathbb{R})$  — нелинейный диффеоморфизм вещественной прямой. Оказывается, что, как правило, такая задача Канторовича не имеет нетривиальных решений (т.е. решений, отличных от случая  $\mu = \nu$ ). Точнее, справедлива следующая теорема:

**Теорема 1.** Пусть  $f \in C^2(\mathbb{R})$  — диффеоморфизм прямой, причем нули функции  $f''$  образуют множество лебеговской меры нуль. Предположим, что мера  $\pi$  на  $X \times X$  имеет проекции  $\mu$  и  $\nu$ , причем мера  $\nu$  абсолютно непрерывна относительно меры  $\mu$ . Пусть конечна величина  $K(\pi)$ . Тогда  $x = y$  для  $\pi$ -почти всех  $(x, y) \in X \times X$  и, следовательно,  $\mu = \nu$ .

Из этой теоремы, в частности, следует, что задача Канторовича не имеет нетривиальных решений в случае, когда  $f$  — нелинейная аналитическая функция.

#### Источники и литература

- 1) V. I. Bogachev: Gaussian measures. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1998.
- 2) D. Feyel - A. S. Ustunel: Monge-Kantorovitch measure transportation and Monge-Ampere equation on Wiener space. Probab. Theory Related Fields, vol. 128 (3), 2004, 347–385.

#### Слова благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант №14-11-00196 при МГУ им. М.В. Ломоносова).