Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

О задаче Канторовича с ограничением на плотность

Доледенок Анна Николаевна

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории функций и функционального анализа, Москва, Россия

E-mail: anya11235@mail.ru

В работе [1] была поставлена модификация классической задачи Канторовича об оптимальной транспортировке — задача об оптимальной транспортировке с ограничением на плотность. Среди всех оптимальных мер с заданными проекциями, имеющих плотности, ограниченные некоторой данной функцией, требуется найти оптимальную. Авторы [1] показали существование и единственность решения этой задачи для пространства $\mathbb{R}^n$. Доклад посвящен задаче об оптимальной транспортировке с ограничением на плотность для бесконечномерного тора C^∞, где C — окружность длины 1 с борелевской σ-алгеброй и мерой Лебега λ.

Пусть $X = Y = C^\infty$ — основные вероятностные пространства, и заданы неотрицательная функция $\chi \in L^1_c(X\times Y)$ и неотрицательные плотности $f \in L^1(X), g \in L^1(Y)$ с одинаковыми массами. Введем обозначения для проекций функции $h \in L^1_c(X\times Y)$ на пространства X и Y: $(h)_X = \int_Y h(x,y)\,dy$, $(h)_Y = \int_X h(x,y)\,dx$. Рассмотрим выпуклое множество интегрируемых плотностей

$$\Gamma(f,g)^\chi = \{h \in L^1(X\times Y) : 0 \le h(x,y) \le \chi(x,y),\ (h)_X = f(x),\ (h)_Y = g(y)\}.$$

Ставится задача оптимальной транспортировки с ограничением на плотность: для непрерывной функции c минимизировать функционал $I_c(h) = \int_{X\times Y} c(x,y)h(x,y)\,dxdy$ на выпуклом множестве плотностей h из $\Gamma(f,g)^\chi$.

Теорема 1. Пусть функция c непрерывна. Пусть заданы неотрицательная функция $\chi \in L^\infty(X\times Y)$ и такие неотрицательные плотности $f \in L^1(X)$, $g \in L^1(Y)$, что $\Gamma(f,g)^\chi \ne \emptyset$. Тогда I_c достигает минимального значения на $\Gamma(f,g)^\chi$.

Для всякой пары переменных (x_i, y_j), где $1 \le i < \infty$, $1 \le j < \infty$, введем обозначение для смешанной второй частной производной функции c: $\partial_{i,j}c = \frac{\partial^2 c(x,y)}{\partial x_i \partial y_j}$.

Теорема 2. Пусть непрерывная функция c удовлетворяет следующим условиям:
(C1) для всякой пары переменных (x_i, y_j), где $1 \le i < \infty$, $1 \le j < \infty$, существует и непрерывна функция $\partial_{i,j}c$;
(C2) существует не более чем счетный набор дизъюнктных открытых множеств $\{G_k\}_{k=1}^N$ (где $N \le \infty$) такой, что выполнены следующие условия:

1) множества G_k имеют положительную меру Лебега: $\forall k \le N\ \lambda(G_k) > 0$;
2) $\lambda(X\times Y \setminus (\bigsqcup_{k=1}^N G_k)) = 0$;
3) для всякого $k \le N$ существует пара переменных (x_{i_k}, y_{j_k}) такая, что функция $\partial_{i_k,j_k}c$ знакопостоянна на G_k.

Пусть фиксирована неотрицательная функция $\chi \in L^\infty(X\times Y)$ и неотрицательные плотности $f \in L^1(X)$, $g \in L^1(Y)$ таковы, что множество $\Gamma(f,g)^\chi \ne \emptyset$. Тогда существует единственная функция $h \in \Gamma(f,g)^\chi$, минимизирующая I_c.

Источники и литература

1) J. Korman and R.J. McCann, Optimal transportation with capacity constraints. {Trans. Amer. Math. Soc.} {367} (2015) 1501-1521.