Исследование интегрального уравнения, возникающего в модели стационарных сообществ

Калистратова Анастасия Владимировна
Студент
Факультет компьютерных наук, НИУ ВШЭ, Москва, Россия
E-mail: kanast74@gmail.com

Предметом данного исследования является разработанная Ульфом Дикманом и Ричардом Лоу модель некоторого экологического сообщества [1], состоящего из особей одного вида, с известными функциями, задающими рождаемость (dispersal kernel) и смертность (competition kernel) внутри популяции, а также уравнение, возникающее при поиске стационарного состояния системы. Цель состоит в отыскании равновесных средних ожидаемых плотностей популяции N, видовых пар $C(\xi)$, а также видовых троек $T(\xi, \xi')$. Для задания последней могут быть использованы следующие аппроксимации:

$$T(\xi, \xi') = \frac{C(\xi)C(\xi')}{N} \tag{1}$$

$$T(\xi, \xi') = C(\xi)N + C(\xi')N + C(\xi' - \xi)N - 2N^3 \tag{2}$$

В рамках указанной модели экологическое сообщество может быть описано набором следующих параметров: b, b' — темпы естественной рождаемости и рождаемости в условиях конкуренции, d, d' — темпы естественной смертности и смертности от конкуренци, а также $m(\xi), w(\xi)$ — ядра рассеивания и конкуренции (dispersal and competition kernels). Предыдущие исследования в этой обрасти касались рассмотрения случаев, когда ядерные функции являются рациональными или Гауссианами [2–3]. Новизна данной работы состоит в том, что ядра рождаемости и смертности имеют принципиально другое распределение, а именно – распределение Стьюдента:

$$m(\xi) = \frac{\Gamma\left(\frac{n_m+1}{2}\right)}{\sqrt{n_m \pi}\,\Gamma\left(\frac{n_m}{2}\right)\left(1 + \frac{\xi^2}{n_m}\right)^{(n_m+1)/2}} \tag{3}$$

Где $\Gamma(x)$ — Гамма – функция Эйлера, n_m - количество степеней свободы распределения Стьюдента, задающего ядро рассевания. Аналогично задается ядро конкуренции.

В случае, когда замыкание для плотности троек имеет вид (1), интегральное уравнение для стационарного второго момента (плотности пар) принимает форму:

$$\frac{m(\xi)Y}{b-d}\int w(\xi)C(\xi)d\xi + b\int m(\xi)C(\xi'+\xi)d\xi' - d'w(\xi)C(\xi) - bC(\xi) = 0 \tag{4}$$

Аналогично для случая (2):

$$\frac{d'bm(\xi)}{b-d}Y + b\int m(\xi)C(\xi'+\xi)d\xi' - dC(\xi) - d'w(\xi)C(\xi) - \\ - \frac{b-d}{Y}\int w(\xi')(C(\xi)+C(\xi')+C(\xi'-\xi)-2)d\xi' = 0 \tag{5}$$

Здесь $Y = \int w(\xi)C(\xi)d\xi$, а средняя плотность популяции может быть найдена с помощью формулы: $N = \frac{b-d}{Y}$.

В ходе исследования было найдено численное решение интегрального уравнения (4) с помощью метода Нистрёма в случаях, когда сообщество располагается в одномерном, двумерном и трехмерном пространстве, а также было решено уравнение (5) в одномерном случае.

В дальнейшем планируется продолжить исследование уравнений, возникающих при замене замыкания плотности троек, а также рассмотреть случаи, когда ядра рассеивания и конкуренции имеют распределение, отличное от распределения Стьюдента.

Литература

1. Dieckmann U., Law R. The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity // Cambridge University Press, 2000
2. Бодров А. Г., Никитин А. А. Качественный и численный анализ интегрального уравнения, возникающего в модели популяции стационарных сообществ // ДАН 2015. Т. 455, 5. С. 507-511.
3. Данченко В. И., Давыдов А. А., Никитин А. А. Об интегральном уравнении для стационарных распределений биологических сообществ // Проблемы динамического управления. Сборник научных трудов. Выпуск 3. 2009г, С. 15-29.