# Исследование одной микробиологической модели

***Жакыпов Абылай Талгатулы***

*Студент*

*Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия*

*E-mail:* scipper92@mail.ru

В данной работе исследуется микробиологическая задача роста колонии трихомных бактерий [3]:

$$\begin{cases} \dot{x} = a - (a + x)u, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad x(0) = x_0 > 0, \\ L = \int\limits_0^T \dfrac{x}{1+x} u \, dt \longrightarrow \max\limits_{u(\cdot) \in \mathcal{Y}_{\mathcal{U}}}, u \in U = [0; 1] \,. \end{cases} \tag{1}$$

Метод решения задачи (1) — принцип максимума Понтрягина [1].
В рассматриваемой задаче имеется «особый» режим:

$$x_{sng} = \sqrt{a}, \quad u_{sng} = \frac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}. \tag{2}$$

Экстремальный процесс в зависимости от начального условия:

1. $x_0 < x_{sng}$: $\tau = \frac{\sqrt{a} - x_0}{a}$.

$$x(t) = \begin{cases} x_0 + at, & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ x_{sng}, & \tau < t \leqslant \theta, \\ x_{sng} e^{\theta - t}, & \theta < t \leqslant T, \end{cases} \qquad u(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ u_{sng}, & \tau < t \leqslant \theta, \\ 1, & \theta < t \leqslant T. \end{cases}$$

2. $x_0 = x_{sng}$:

$$x(t) = \begin{cases} x_{sng}, & 0 \leqslant t \leqslant \theta, \\ x_{sng} e^{\theta - t}, & \theta < t \leqslant T, \end{cases} \qquad u(t) = \begin{cases} u_{sng}, & 0 \leqslant t \leqslant \theta, \\ 1, & \theta < t \leqslant T. \end{cases}$$

3. $x_0 > x_{sng}$: $\tau = \ln x_0 - \ln \sqrt{a}$,

$$x(t) = \begin{cases} x_0 e^{-t}, & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ x_{sng}, & \tau < t \leqslant \theta, \\ x_{sng} e^{\theta - t}, & \theta < t \leqslant T, \end{cases} \qquad u(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ u_{sng}, & \tau < t \leqslant \theta, \\ 1, & \theta < t \leqslant T. \end{cases}$$

Момент $\theta$ схода с «особого режима» не зависит от начального условия $x_0$ и всегда равен

$$\theta = T - \ln\left(2 + \frac{1}{\sqrt{a}}\right). \tag{3}$$

Оптимальность найденного экстремального процесса доказывалась с помощью динамического программирования Беллмана. В классической форме требуется, чтобы функция Беллмана $V(t,x)$ была гладким решением дифференциального уравнения Беллмана [2]. Но частная производная по времени функции Беллмана $V_t'(t,x)$ для задачи (1) имеет разрыв 1-го рода в момент времени $\theta$. Поэтому было сформулировано и доказано следующее утверждение, из которого и следует оптимальность найденного экстремального процесса:

**Теорема 1.** *Пусть*

1. *V(x,t) — решение уравнения Беллмана, причем V(x,t),* $V_x'(x,t)$ *непрерывны на* $(0;\infty)\times(0;T)$*, а* $V_t'(x,t)$ *непрерывна на* $(0;\infty)\times(0;\theta)\cup(\theta;T)$*,*
2. *вдоль допустимого процесса*

$$(x(t), u(t)),\ 0 \leqslant t \leqslant T, \quad x(t_0) = x_0, \tag{4}$$

*выполняется условие* $\forall t \in (0,T)$

$$V_t'(x(t),t) + f^0(x(t),u(t)) + V_x'(x(t),t)\cdot f(x(t),u(t)) = 0. \tag{5}$$

*Тогда процесс* (4) *оптимален. Оптимальное значение функционала равно* $V(x_0,0)$*.*

## Литература

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.
2. Беллман Р. Динамическое программирование. М.: ИЛ, 1960.
3. H. A. van den Berg, Y. N. Kiselev, S. A. L. M. Kooijman, M. V. Orlov. Optimal allocation between nutrient uptake and growth in a microbial trichome // Journal of Mathematical Biology. Berlin: Springer Verlag, 1997. № 37. P. 28—48.