О приведении векторной системы к виду с относительным порядком.

Роговский Александр Игоревич

Студент

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: alexander.rogovskiy@gmail.com

Рассматривается линейная дискретная стационарная динамическая система:

$$x^{t+1} = Ax^t + B\xi^t,\ y^t = Cx^t,\ t = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

где $x^t \in \mathbb{R}^n,\ y^t \in \mathbb{R}^l,\ \xi^t \in \mathbb{R}^l$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ B \in \mathbb{R}^{n\times l},\ C \in \mathbb{R}^{l\times n}$, $Rg\,B = Rg\,C = l$.

Определение 1 ([1]). Вектор $r = (r_1, r_2, \ldots, r_l)$ называется вектором относительного порядка (далее ОП) для системы (1), если

$$\begin{aligned} &1) C_iB = 0,\, C_iAB = 0,\, \ldots,\, C_iA^{r_i-2}B = 0,\, C_iA^{r_i-1}B \neq 0, \\ &2) |H(r)| = \begin{vmatrix} C_1A^{r_1-1}B \\ \cdots \\ C_lA^{r_l-1}B \end{vmatrix} \neq 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где C_i – строки матрицы C, $i = 1, 2, \ldots, l$.

Данное определение является условием применимости некоторых методов теории управления. Известно (см. [2]), что условия 1) и 2) могут быть несовместны. Тем не менее, в результате применения некоторых преобразований выходов можно добиться выполнения данного определения. Пусть, например, y^t является выходом системы $\{A, B, C\}$, а $\tilde{y}^t$ – системы $\{A, B, \tilde{C}\}$, причем справедливо соотношение

$$\tilde{y}^t = T_0y^t + T_1y^{t+1} + \ldots + T_py^{t+p},\ t = 0, 1, 2, \ldots\ , \tag{3}$$

где $T_i \in \mathbb{R}^{l\times l},\ T_0 \neq 0,\ T_p \neq 0,\ i = 1, \ldots, p$. Тогда условия (2) могут быть выполнены для второй системы, но не выполнены для первой. В этом случае будем говорить, что преобразование выходов (3) приводит систему к виду с ОП. При этом, если известен выход y^t первой системы, то выход второй находится из (3). Это позволяет свести некоторые задачи для исходной системы (например, задачу обращения) к задачам для преобразованной системы, поэтому поиск таких преобразований является целесообразным.

Определение 2. Матрицей Розенброка системы $\{A, B, C\}$ называется матрица вида:

$$R(s) = \begin{pmatrix} sI - A & -B \\ C & 0 \end{pmatrix}, \ s \in \mathbb{C}.$$

Определение 3. Вектор r назовем вектором неполного относительного порядка (НОП), если для него выполнено первое из требований определения 1.

Лемма 1. *Пусть даны две системы $\{A, B, C\}$ и $\{A, B, \hat{C}\}$, где $\hat{C}_i = C_i A^{r_i - 1}$, а r – вектор НОП первой из них. Тогда справедливо соотношение: $|\hat{R}(s)| = s^{|r|-l}|R(s)|$, где $R(s), \hat{R}(s)$ – матрицы Розенброка систем $\{A, B, C\}, \{A, B, \hat{C}\}$ соответственно, $|r| = \sum_{i=0}^{l} |r_i|$.*

Лемма 2. *В условиях леммы 1 выходы систем $\{A, B, C\}$ и $\{A, B, \hat{C}\}$ (при одинаковых начальных условиях и входах) связаны соотношением $\hat{y}^t = (y_1^{t+r_1-1}, y_2^{t+r_2-1}, \ldots, y_l^{t+r_l-1})^T$.*

Теорема 1. *Для любой системы $\{A, B, C\}$, для которой $|R(s)| \not\equiv 0$, существует матрица $\hat{C}$ полного ранга, такая, что выходы систем $\{A, B, C\}$ и $\{A, B, \hat{C}\}$ связаны соотношением (3), и для второй системы выполнено определение 1.*

Таким образом, любая система, для которой $|R(s)| \not\equiv 0$, может быть приведена к виду с ОП.

Литература

1. Isidori A. Nonlinear control systems. London: Springer-Verlag, 1995.
2. Ильин А. В., Коровин С. К., Фомичев В. В. Методы робастного обращения динамических систем. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.
3. Краев А. В. Необходимые условия обратимости линейных дискретных динамических систем // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47, № 4. С. 592–594.
4. Краев А. В., Фомичев В. В., Роговский А. И. К обобщению относительного порядка // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50, № 8. С. 1128-1132.
5. Краев А. В. Некоторые свойства относительного порядка линейных стационарных динамических систем // Нелинейная динамика и управление. № 8. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. С. 105–112.