Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем на поверхностях вращения.

Кантонистова Елена Олеговна
Московский государственный университет им.М.В.Ломоносова, механико–математический факультет, Москва, Россия
E-mail: elena.kantonistova@yandex.ru

Рассмотрим регулярную параметризованную кривую $(f(r), g(r)), r \in [0; L]$, без самопересечений, где r — натуральный параметр. Функция $f(r), r \in [0; L]$ — гладкая, а также $f(r) > 0, r \in (0; L)$ и $f(0) = f(L) = 0$. Будем вращать эту кривую вокруг оси Oz, в результате мы получим двумерную поверхность M в $\mathbb{R}^3$. Метрика на ней (вне полюсов, т.е. на интервале $(0; L)$) в координатах (r, φ) задается следующей формулой: $ds^2 = dr^2 + f^2(r)d\varphi^2$.

Пусть $V(r)$ — гладкая функция на отрезке $[0; L]$, назовем еѕ *потенциалом.* Рассмотрим натуральную механическую систему на кокасательном расслоении T^*M к M со стандартной симплектической структурой $\omega = dp \wedge dq$ и функцией Гамильтона $H = \frac{1}{2}g^{ij}(x)p_i p_j + V(x)$. Пусть функция $f(r), r \in [0; L]$, задает гладкую поверхность вращения M, а потенциал $V(r), r \in [0; L]$, — гладкая функция на M. Тогда будем говорить, что пара функций $(f(r), V(r)), r \in [0; L]$, задает *натуральную механическую систему на римановом многообразии вращения* (M, g). Система на поверхности вращения является интегрируемой гамильтоновой системой; еѕ первые интегралы обозначим через H и p_φ.

Теорема 1. *Рассмотрим натуральную механическую систему на многообразии вращения M, заданную парой функций $(f(r), V(r)), r \in [0; L]$. Если функция $f(r)$ — функция Морса на интервале $(0; L)$, функция $V(r)$ — функция Ботта на сфере, не являющаяся константой, $V'(r)^2 + f'(r)^2 > 0$ на $(0; L)$, то бифуркационная кривая симметрична относительно оси H и состоит из кривых трех типов: "парабола", "клюв" или "лунка".*

Теорема 2. *Рассмотрим систему на поверхности вращения, заданную парой функций $(f(r), V(r))$, где функции $f(r)$ и $V(r)$ удовлетворяют всем условиям из теоремы 1. Пусть Q_h^3 — неособая изоэнергетическая поверхность, на которой p_φ — функция Ботта. Тогда молекула системы на Q_h^3 симметрична (без учета ориентации на ребрах) относительно оси H, а ориентация на ребрах задается в сторону возрастания p_φ. Т.е. молекула имеет вид $W - W$, где каждая W — это либо один атом A, либо дерево. Вершина дерева W — это седловой атом V_k, все остальные вершины имеют типы A и V_k, а висячие вершины имеют тип A. При этом при $p_\varphi > 0$ входящее ребро для каждого атома V_k одно, а ис-*

ходящих k (при $p_\varphi < 0$ картина антисимметрична).Атомы $V_k \neq B$ возникают на Q^3_h, если при $H = h$ происходит наложение нескольких дуг бифуркационных кривых типа B. Атомов $V_k \neq B$ не более чем счетное число, т.к. система при соответствующих энергиях h неустойчива.

Теорема 3. *Пусть W — молекула системы на поверхности вращения на неособой изоэнергетической поверхности Q^3_h, где h удовлетворяет условиям теоремы 2. Тогда: на ребрах $A - V_k$ молекулы метка $r = 0$, $\varepsilon = +1$; на ребрах $V_k - V_k$, где оба атома V_k находятся в одной полуплоскости ($p_\varphi > 0$ или $p_\varphi < 0$), метка $r = \infty$, метка $\varepsilon = +1$; на ребре $V_k - V_k$, симметричном относительно оси H, метка $r = \infty$, а метка $\varepsilon = -1$.*

На ребре $A - A$ метка r определяется расположением уровня энергии h относительно энергий h_1, h_2 особых точек ранга 0: если $h < min\{h_1, h_2\}$, то $r = \infty$; если $h_1 < h < h_2$, то $r = 0$; если $r > max\{r_1, r_2\}$, то $r = 1/2$; при $h < min\{h_1, h_2\}$ метка $n = 0$; при $h_1 < h < h_2$ метка $n = 1$; при $h > max\{h_1, h_2\}$ метка $n = 2$.

Литература

1. А.В.Болсинов, А.Т.Фоменко, “Интегрируемые гамильтоновы системы”, том 1,2, изд–во “Удмуртский университет”, 1999
2. Е.О.Кантонистова, “Исследование топологических и симплектических свойств системы «сферический маятник»”, Вестник Моск.Ун–та, 2013